**Udledning af Riemanns formel for $\pi_N$**

På samme måde som vi ovenfor har fundet en formel for summen $\sum \mu(n)$ for tallene n = 1, 2, 3, ... op til N-1, kan vi finde en formel for summen $\sum 1$ for *primtallene* p = 2, 3, 5, ... op til N-1, og denne funktion af N er jo netop Riemanns funktion $\pi_N$. Nemlig ved først at danne zetafunktionen (fra side ...):

$$Z(z) = \sum_{p \text{ primtal}} 1/p^z$$

(for Re(z) > 1), for så har vi ved en udregning helt analog til den der førte til formlen for $\Sigma\mu(n)$ på side ..., at:

$$\pi_N = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} N^z\, Z(z)\, dz/z$$

(hvor a > 1). Og i denne skal vi nu udtrykke Z(z) ved noget vi kan regne videre på.

Denne formel er stort set også Riemanns udgangspunkt, men vi vil gå ad en vej som fører hurtigere frem til den endelige formel end Riemann gjorde. Hos os vil der så undervejs dukke en størrelse op som vi i første omgang vil se bort fra, da vi formoder at den er nul. Det er den på en måde også, men dette er ikke helt let at vise. Jeg vil først gå let hen over problemet, så kan læseren se om han opdager fejlen inden jeg afslører hvori den består og fortæller om hvordan Riemann løste problemet.

Af Eulers produktfremstilling for $\zeta(z)$ (side ...):

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ primtal}} (1 - 1/p^z)^{-1},$$

får vi at

$$\log\zeta(z) = -\sum_{p \text{ primtal}} \log(1 - 1/p^z),$$

og kombineres denne med

$$\log(1 - h) = -\sum_{n=1}^{\infty} h^n/n$$

(gældende for $|h| < 1$, side ...), får vi at:

$$\log\zeta(z) = \sum_{p \text{ primtal}} \sum_{n=1}^{\infty} (1/p^z)^n/n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \text{ primtal}} (1/p^{nz})/n = \sum_{n=1}^{\infty} Z(nz)/n.$$

Og heraf ved Möbius-inversion (side ...) at:

$$Z(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \log\zeta(mz).$$

Af denne sammenhæng imellem $Z(z)$ og $\zeta(z)$ ses iøvrigt at $Z(z) \to \infty$ for $z \to 1$ (og at $Z(z)$ faktisk har simpel pol i $z = 1$ med residuum 1), dvs. rækken af de reciproke primtal

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/23 + 1/29 + \ldots$$

er divergent (dette blev første gang bevist af Euler i 1737).

Og til brug i næste kapitel bemærker vi her, at den afledede $Z'(z)$ af $Z(z)$ er zetafunktionen givet ved

$$Z'(z) = -\sum_{p \text{ primtal}} \log p/p^z,$$

og hvis vi definerer zetafunktionen $Z^*(z)$ ved

$$Z^*(z) = -\sum_{n \text{ således at } n=p^r \text{ for } p \text{ primtal}} \log p/n^z$$

(den adskiller sig fra $Z'(z)$ ved at ikke bare primtallene men også alle primtalspotenserne er medtaget, jvf. Side ...), så får vi (ved at differentiere udtrykkene for $\log\zeta(z)$ og $Z(z)$ ovenfor) dels at $\zeta'(z)/\zeta(z) = Z^*(z)$ og dels at

$$Z'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\, Z^*(mz).$$

Det er den viste integralformel for $\pi_N$ med Z(z) udtrykt ved $\log\zeta(z)$ der er benyttet i programmet "PrimZeta" (i mappen "Riemann"). I dette program udregnes $\pi_N$ dels ved optælling og dels ved denne integralformel, og desuden vises grafen for Z(z) langs en linie parallel med y-aksen, se omtalen på side .... Bemærk at regnetiden for formlen er uafhængig af N, så for N så stor at en optælling af antallet af primtal mindre end N er meget tidskrævende, kan vi med denne formel finde en god tilnærmelse til dette antal (for $N = 10^9$ giver formlen (ved en passende regnetid) 50894495 - det sande antal har jeg fundet i en bog, det er 50847534).

Vi har alt ialt indtil nu denne formel for $\pi_N$:

$$\pi_N = \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(m)/m)(1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} N^z \log\zeta(mz)\, dz/z)$$

(hvor a > 1) - og den begynder jo at ligne Riemanns formel

$$\pi_N = \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(m)/m)\, J(N^{1/m}),$$

hvor

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \sum_{k=1}^{\infty} Li(x^{-2k}),$$

og hvor ρ løber over nulpunkterne for ζ(z) med Re(z) > 0 (dvs. i strimlen 0 < Re(z) < 1).

For at komme videre, dvs. udregne integralet, løber vi ind i det problem at funktionen $\log\zeta(z)$ ikke er meromorf, dvs. der er punkter $z_0$ omkring hvilke den ikke kan skrives på formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

(side ...), nemlig alle nulpunkterne for $\zeta(z)$, da logaritmefunktionen log z ikke kan udvikles i en sådan uendelig række omkring z = 0 (side ...). Så derfor kan vi ikke umiddelbart bruge residueregning. Derimod er *den afledede* af $\log\zeta(z)$ meromorf, denne er nemlig $\zeta'(z)/\zeta(z)$, og vi kan omforme integralet til et integral hvor det er $\zeta'(z)/\zeta(z)$ i stedet for $\log\zeta(z)$ der optræder, ved at bruge partiel integration (side ...):

$$\int g'(z)\, f(z)\, dz = -\int g(z)\, f'(z)\, dz.$$

Hvis vi i det første integral her sætter $f(z) = \log\zeta(mz)$, skal g(z) være en funktion således at $g'(z) = N^z/z$, dvs. g(z) skal være givet ved

$$g(z) = \int_c^z N^u\, du/u,$$

hvor c er et vilkårligt komplekst tal og hvor integrationsvejen er en vilkårlig kurve fra c til z som blot ikke går igennem 0 (g(z) er altså kun bestemt op til addition af en konstant, men denne vil forsvinde bort ved integrationen). Det er mest hensigtsmæssigt at lade c være $-\infty$, og så får vi (hvis vi i integralet der definerer g(z) indfører substitutionen u = zt) at $g(z) = \mathrm{Li}(N^z)$, hvor Li(z) er den tidligere indførte integrallogaritme (side ...):

$$\mathrm{Li}(z) = \int_{-\infty}^{1} z^t\, dt/t$$

for $|z| \geq 1$, og

$$\mathrm{Li}(z) = \int_{1}^{\infty} z^t\, dt/t$$

for $|z| \leq 1$. Li(z) er ikke veldefineret for det generelle z, men enhver funktion af formen $z \to \mathrm{Li}(x^z)$ (hvor x er reel og positiv) er veldefineret, og det er kun sådanne vi har brug for. Denne funktion er holomorf i hele den komplekse plan undtagen i punktet $z = 0$, hvor den har logaritmisk pol (side ...), så den nye integrand $Li(N^z)\ \zeta'(mz)/\zeta(mz)$ er fortsat ikke-meromorf, men der er kun tale om denne ene ikke-meromorfe singularitet, og vi vil i første omgang blot integrere udenom $z = 0$.

Vi har derfor at

$$\pi_N = \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(m)/m)(-1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} Li(N^{z/m})\ \zeta'(z)/\zeta(z)\ dz)$$

(idet vi i integralet har indført substitutionen $mz \to z$), hvor integralet kan udregnes ved residueregning, idet der dog bliver en rest som er integralet langs en lille cirkel omkring $z = 0$. De simple poler for $\zeta'(z)/\zeta(z)$ er dels nulpunkterne for $\zeta(z)$, hvor $\zeta'(z)/\zeta(z)$ har simpel pol med residuum 1, og dels polen $z = 1$ for $\zeta(z)$, hvor $\zeta'(z)/\zeta(z)$ har simpel pol med residuum -1. Dette følger af at en pol for en funktion af formen $f'(z)/f(z)$ altid er simpel, og den har residuum 1 når polen kommer fra et nulpunkt for $f(z)$ og residuum -1 når polen kommer fra en pol for $f(z)$.

Vi får at parentesen indeholdende integralet er $J(N^{1/m})$, hvis $J(x)$ defineres ved:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \sum_{k=1}^{\infty} Li(x^{-2k}) + R(x)$$

hvor $\rho$ løber over nulpunkterne for $\zeta(z)$ i strimlen $0 < Re(z) < 1$ og hvor $-2k$ løber over de øvrige nulpunkter og hvor $R(x)$ er integralet af $Li(x^z)\ \zeta'(z)/\zeta(z)$ langs en lille cirkel omkring 0. Dette bidrag $R(x)$ bliver imidlertid mere og mere uafhængigt af x jo mindre cirklen er, idet $x^z$ langs en sådan er nær 1 og $\zeta'(z)/\zeta(z)$ er nær $\zeta'(0)/\zeta(0)$. Da $Li(x^z) \to \infty$ for $z \to 0$ bliver $R(x)$ dog større og større jo mindre cirklen er, så vi skal være på vagt, men *hvis* $R(x)$ konvergerede imod et endeligt tal når radius af cirklen konvergerer imod 0, ville dette leds bidrag til den endelige formel for $\pi_N$ forsvinde, da vi jo har $\sum \mu(m)/m = 0$ (side ...). Men vi skal strengt taget argumentere for at tallene $R(N^{1/m})$'s bidrag til den endelige formel, udregnet for en lille cirkel omkring 0, forsvinder når dennes radius går imod 0, dette vil vi dog ikke gøre her.

Da $\zeta(\underline{z}) = \underline{\zeta(z)}$ gælder, at hvis $\rho = \alpha + it$ er et nulpunkt for $\zeta(z)$, da er det konjugerede tal $\underline{\rho} = \alpha - it$ også et nulpunkt. Og da $Li(x^{\underline{\rho}}) = \underline{Li(x^{\rho})}$, er $Li(x^{\rho}) + Li(x^{\underline{\rho}}) = 2Re(Li(x^{\rho}))$, for et sådant par af konjugerede $\rho$, så derfor behøver vi kun beskæftige os med de positive t således at $\rho = \alpha + it$ er et nulpunkt. Den anden sum i $J(x)$ (som løber over de negative nulpunkter: -2, -4, -6, ...) er ikke noget problem, den kan let omformes til et enkelt integral ved anvendelse af formlen for summen af en kvotientrække:

$$\sum_{k=1}^{\infty} Li(x^{-2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1}^{\infty} x^{-2ky}\, dy/y = \int_{1}^{\infty} 1/(x^{2y} - 1)\, dy/y.$$

Og som det ses, går dette led imod 0 for $x \rightarrow \infty$ (i modsætning til de øvrige led i Riemanns formel som vokser). I programmet er dette integral betegnet $H(x)$ og udregnet ved Simpsons formel (side ...).

Nu har vi udledt Riemanns eksakte formel for $\pi_N$, men hvad er det da for en ting vi har overset? Det er at den partielle integration

$$\int g'(z)\, f(z)\, dz = -\int g(z)\, f'(z)\, dz$$

vi foretog, ikke umiddelbart er lovlig. Det led der egentlig mangler her, og som normalt er lig nul når man anvender partiel integration (se side ...), er ikke nul, dette led (som er et integral) er faktisk divergent og det er integralet på højre side også. For at beskrive situationen, betragter vi følgende tre kurvestykker (bestemt ved et stort reelt tal t): liniestykket L på linien $x = a$ fra $a-it$ til $a+it$, halvcirklen $C_-$ i den negative halvplan fra $a-it$ til $a+it$, samt den lukkede kurve K bestående af $L + C_-$ (og hvor $C_-$ gennemløbes i modsat retning). Integralet på højre side er

$$\int_L = \int_K + \int_{C-},$$

og det vi ovenfor har regnet ud ved residueregning er (grænseværdien af) $\int_K$, men $\int_{C-}$ går i dette tilfælde ikke imod 0 (sådan som oftest er tilfældet), dette integral divergerer, men det ophæves af det omtalte udeladte integral. Dette er dog lidt besværligt at vise. Sidst i kapitlet skitserer vi hvordan Riemann gik tilværks.

For fuldt ud at kunne udnytte Riemanns formel for $\pi_N$:

$$\pi_N = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m\, J(N^{1/m})$$

hvor

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Li}(x^{-2k}),$$

skal vi finde et vist antal af nulpunkterne ρ for ζ(z) med Re(z) = ½, f.eks. alle de ρ = ½+*i*t for hvilke 0 < t < 200. Og hvordan finder man disse t-værdier? Ja, man kunne blot tegne grafen for den reelle funktion |ζ(½+it)| (t > 0), og søge efter de t-værdier hvor den rører x-aksen. Men dette er en dårlig idé: jo mere vi zoomer ind på grafen jo mere falder den sammen med x-aksen. Vi må have en funktion som *skærer* x-aksen. Og en sådan funktion kendte Riemann. For at komme frem til den, må vi først vise den funktionalligning for ζ (z) som Riemann fandt og som sammenknytter ζ(z) og ζ(1-z).

Riemanns funktionalligning siger, at den meromorfe funktion $\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ bliver uforandret når z erstattes med 1-z, dvs. for alle z gælder:

$$\pi^{-z/2}\,\Gamma(z/2)\,\zeta(z) = \pi^{-(1-z)/2}\,\Gamma((1-z)/2)\,\zeta(1-z).$$

Ved at benytte funktionalligningerne for Γ(z) på side ..., kan denne ligning skrives:

$$\zeta(1-z) = 2(2\pi)^{-z}\,\Gamma(z)\cos(z\pi/2)\,\zeta(z),$$

og det er den jeg har brugt i programmet til at udregne ζ(z) for Re(z) < ½. Ved en sådan praktisk anvendelse af formlen, opstår dog det problem at da Γ(z) aftager hurtigt og cos(zπ/2) vokser hurtigt (eksponentielt) for |Im(z)| → ∞, er produktet af disse to tal vanskeligt at udregne for |Im(z)| stor, når de udregnes hver for sig. Men da Γ(z) findes ud fra logΓ(z±N) (side ...) og da $\cos(z) \approx e^{|y|}(\cos x \pm i\sin x)/2$ (z = x+*i*y, + for y < 0 og - for y > 0) for |y| stor, har vi at $2(2\pi)^{-z}\Gamma(z)\cos(z\pi/2) \approx \exp(-z\log(2\pi)+\log\Gamma(z\pm N)+|y|\pi/2)\cdot(\cos(\pi x/2)\pm i\sin(\pi x/2))$ gange 1/(z(z+1)...(z+N-1)) eller (z-1)...(z-N) for henh. + og - i logΓ(z±N). Funktionen $2(2\pi)^{-z}\Gamma(z)\cos(z\pi/2)$ udregnet på denne måde for |y| > 10, er i unit-en "GammaZeta", der udregner ζ(z) og Γ(z), og den er betegnet "cosgam".

Programmet "Zetafunktion" (i mappen "Riemann") viser bevægelsen af $\zeta(z)$ langs en linie parallel med y-aksen, dvs. kurverne $y \to \zeta(x+iy)$, hvor x holdes konstant og hvor x og begyndelses y-værdien skal indtastes. For x = 0.5 og y = 0 så fås kurven på side ....

Riemanns funktionalligning kan fås ved at anvende Poissons summationsformel (side ...) på funktionen $f(x) = (w+ix)^{-z} + (w-ix)^{-z}$, hvor $\mathrm{Re}(w) > 0$ og $\mathrm{Re}(z) > 1$. Denne funktion har som Fouriertransformeret funktionen $F(y) = 2/(\Gamma(z)|y|^{1-z} e^{w|y|})$, og Poissons formel giver:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1/(w+mi)^z = (2\pi)^z/\Gamma(z) \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^{1-z} e^{2\pi wn}).$$

Resten af beviset bygger kraftigt på Riemanns identitetsprincip (side ...): Højre side er en holomorf funktion af z i hele planen (på grund af de kraftigt voksende tal $e^{2\pi wn}$), derfor kan venstre side udvides til en holomorf funktion af z i hele planen, og denne minus $1/w^z$ har grænseværdi $2\cos(z\pi/2)\zeta(z)$ for $w \to 0$ for $\mathrm{Re}(z) > 1$, og derfor for alle z (vi har benyttet at $1/i^z + 1/(-i)^z = 2\cos(z\pi/2)$). For $\mathrm{Re}(z) < 0$ har venstre side altså grænseværdi $2\cos(z\pi/2)\zeta(z)$ for $w \to 0$ (da $1/w^z$ har grænseværdi 0 for $w \to 0$) og for $\mathrm{Re}(z) < 0$ har højre side grænseværdi $(2\pi)^z/\Gamma(z)\, \zeta(1-z)$ for $w \to 0$, altså er $2\cos(z\pi/2)\zeta(z) = (2\pi)^z/\Gamma(z)\, \zeta(1-z)$ for $\mathrm{Re}(z) < 0$ og dermed for alle z.

Nu til Riemanns funktion der kan finde de ikke-trivielle nulpunkter for $\zeta(z)$. Af funktionalligningen for $\zeta(z)$ ses at tallet $\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ er reelt når $\mathrm{Re}(z) = ½$, idet tallet 1-z i så fald er $\underline{z}$. Men dette betyder at hvis vi ganger $\zeta(½+it)$ med $\pi^{-it/2}\Gamma(¼+it/2)$ får vi en *reel* funktion af t, og nulpunkterne af denne er de samme som nulpunkterne af $\zeta(½+it)$ (da $\Gamma(z)$ ikke har nulpunkter). Vi vil dog istedet gange med funktionen $\pi^{-it/2}\,\Gamma(¼+it/2)/|\Gamma(¼+it/2)|$ som har norm 1 og derfor kan skrives på formen $e^{\theta(t)i}$, hvor $\theta(t)$ er en reel funktion. Ud fra formlen for $\log\Gamma(z)$ (side ...) kan man få følgende tilnærmelsesformel for $\theta(t)$:

$$\theta(t) \approx (t/2)(\log(t/(2\pi)) - t/2 - \pi/8 + 1/(48t) + 7/(5760t^3),$$

hvor fejlen er mindre end $2/t^5$, og denne nøjagtighed er rigelig da t er stor.

Ved at kopiere programmet "Graf" og indsætte funktionen $y = \zeta(½+ix)\, e^{\theta(x)i}$, har vi et program som tegner en kurve hvis skæringspunkter med x-aksen er de tal vi søger. De første 5 skæringspunkter er 14.135, 21.022, 25.011, 30.425, 32.935. De næste finder vi ved f.eks. at lade begyndelses x-værdien være 30 og intervallet være 10. I stedet for at bruge denne graf til at finde de præcise værdier af nulpunkterne, bør vi nøjes med blot at bruge den til at lokalisere dem, og så i stedet bruge Newtons iterationsprocedure til at finde deres eksakte værdi. Newtons iterationsprocedure kommer til at lyde: $z \to z - \zeta(z)/\zeta'(z)$, og vi har en formel for $\zeta'(z)$ ved at differentiere Euler-Maclaurin-sumformlen for $\zeta(z)$ (side ...). I programmet "Newton" (i mappen "Riemann") kan man indtaste et komplekst tal i nærheden af linien $x = ½$, og se hvordan det går. Det går oftest galt hvis punktet ikke er lige i nærheden af et nulpunkt, men er det det, skal der kun nogle ganske få iterationer til førend iterationsfølgen forbliver uforandret. Resultatet af en sådan søgning efter de første 79 nulpunkter (dem med y-værdi mindre end 200) er indlagt i unit-en "Nulpunkt". Hvis man laver et program som automatisk søger og udprinter nulpunkter, kan man risikere at det springer nogle over, for to på hinanden følgende nulpunkter kan ligge ligeså tæt det skal være.

Tilbage er kun at finde tilnærmelser til integralerne (hvor x er reel):

$$\mathrm{Li}(x^{\rho}) = \int_{-\infty}^{1} x^{t\rho}\,dt/t$$

og

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{0}^{x} dt/\log t$$

idet Li(z) for z reel er givet ved det sidste integral (side ...). Disse integraler udregnes i unit-en "Funktion" og er betegnet henh. LiC(x) og LiR(x). Integranderne har singularitet i henh. 0 og 1, hvor der skal divideres med nul. I det sidste integral kan vi løse problemet én gang for alle ved først at udregne Li(2) (= 1.04...) og benytte at Li(x) = Li(2) + integralet hvor 0 er erstattet med 2. Til at udregne dette integral har jeg benyttet Simpsons metode (side ...). Det første integral udregnes ved trapezmetoden (side ...), og det er summen af en sum gående fra $\varepsilon$ til 1 og en sum gående fra $-\varepsilon$ til $-N$ (N stor, $\varepsilon$ lille) (i den første sum er intervallerne lige store og i den anden udgør de en voksende kvotientrække). Begge disse bidrag er betragtelige, og $\varepsilon$ skal være meget lille for at få en god tilnærmelse (prøv i programmet at slække på præcisionen og se hvordan det fører til at grafen for Riemanns funktion som vi nu skal tegne, får voldsomme udsving).

Men faktisk kan vi udregne summen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(N^{1/m})$$

meget hurtigere ad anden vej. Hvis vi nemlig heri erstatter N med $e^x$, har vi en reel funktion f(x) som er defineret og analytisk for $x \neq 0$, men den har grænseværdien 1 for $x \to 0$, og dens udvidelse er også analytisk i x = 0 (bemærk at $\sum \mu(m)/m = 0$). Differentierer vi succesivt og sætter x = 0, får vi at

$$f^{(n)}(0) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m^{n+1}\Big)/n = 1/(\zeta(n+1)n)$$

for n = 1, 2, 3, ... (vi har benyttet formlen for $1/\zeta(n)$ på side ...). Derfor har vi af Taylors formel (side ...) at indenfor en omegn af x = 0 er

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n/(\zeta(n+1)nn!),$$

og da højresiden klart har konvergensradius $\infty$, gælder denne ligning for alle x. Så derfor er (Gram, 1893):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(N^{1/m}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\log N)^n/(\zeta(n+1)nn!),$$

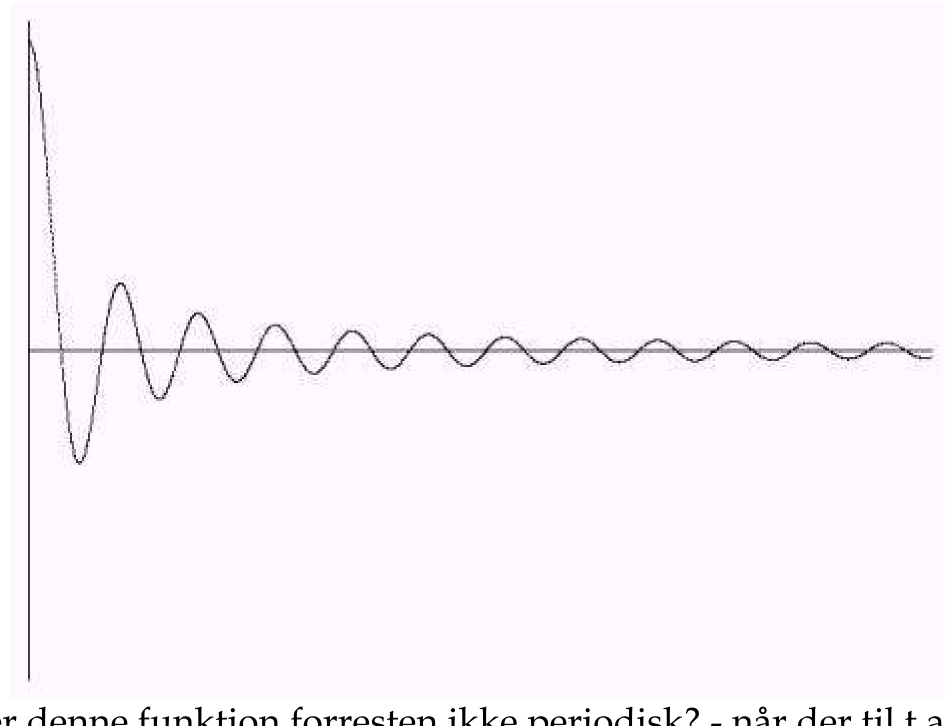
og den sidste række konvergerer meget hurtigt.

Nu kan vi lave et program der tegner Riemanns funktion $\pi_x$ (programmet "Riemanns funktion"). Vi tager en kopi af programmet "Graf" og indsætter Riemanns formler på det sted hvor y = f(x) skal placeres. Kurven er vældig fascinerende at se på for små x-værdier (x < 100), for sådanne bør man dog ikke medtage alle de 79 nulpunkter, for så svinger kurven for vildt. Men jo større x er, jo flere af nulpunkterne får betydning, derfor begynder svingningerne at aftage.

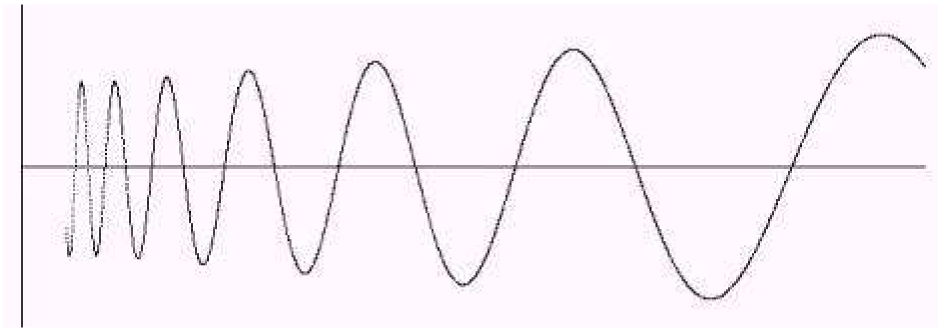
Som sagt (side ...) kan bidraget fra summen af den uendelige række hvis m-te led (m = 1, 2, 3, ...) er tallet

$$(\mu(m)/m) \sum \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(N^{\rho/m}))$$

(hvor ρ gennemløber de ikke-trivielle nulpunkter med Im(ρ) > 0), blive betragteligt for meget store N. Og umiddelbart er denne rækkes første led, $\sum \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(N^{\rho}))$, faktisk af samme størrelsesorden som det næstvigtigste led i Riemanns formel: $\mathrm{Li}(N^{1/2})/2$. Desuden er en uendelig række af formen $\sum \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(x^{\rho}))$ (x > 0) *ikke* absolut konvergent (dvs. rækken $\sum |\mathrm{Re}(\mathrm{Li}(x^{\rho}))|$ er divergent): konvergensen beror på leddenes vekslende fortegn. Grafen for en funktion af formen $t \to \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(x^{½+it}))$ ser således ud (her er x = 150 og t går fra 0 til 15):



(hvorfor er denne funktion forresten ikke periodisk? - når der til t adderes $2\pi/\log x$ er tallet $x^{½+it}$ jo uforandret). Men grafen for en funktion af formen $x \to \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(x^{½+it}))$, dvs. en af de funktioner som indgår i sumfunktionen $x \to \sum \mathrm{Re}(\mathrm{Li}(x^{\rho}))$ (hvor ρ gennemløber de ikke-trivielle nulpunkter med Im(ρ) > 0), ser således ud (her er ρ det første nulpunkt, dvs. t = 14.135, og x går fra 0 til 100):



Kurverne er svagt voksende, idet deres maksimale udsving er af størrelsesorden $\sqrt{x}/(t \log x)$. Udsvingene aftager for voksende t, men som sagt kan de kun summeres i kraft af at de svinger omkring x-aksen.

Nulpunkterne for $\zeta(z)$ er de z som opfylder både $\mathrm{Re}(\zeta(z)) = 0$ og $\mathrm{Im}(\zeta(z)) = 0$. De z for hvilke $\mathrm{Re}(\zeta(z)) = 0$ vil bestå af et system af kurver som deler planen i det område hvor $\mathrm{Re}(\zeta(z)) > 0$ og det område hvor $\mathrm{Re}(\zeta(z)) < 0$, en kurve i dette system kaldes en R-linie. Tilsvarende er en I-linie en af kurverne bestemt ved $\mathrm{Im}(\zeta(z)) = 0$. Nulpunkterne for $\zeta(z)$ er alle skæringspunkterne imellem R- og I-linierne. Da $\zeta(z)$ er reel for z reel, er x-aksen en I-linie, og dennes skæringspunkter med R-linierne er alle de trivielle nulpunkter $-2k$, $k = 1, 2, 3, ....$ Programmet "RogIlinier" viser R- og I-linierne. Nogle af I-linierne er nogenlunde parallelle med x-aksen ($I_1$-linierne), men andre af I-linierne ($I_2$-linierne) og alle R-linierne kommer fra $-\infty$ bøjer af og vender tilbage til $-\infty$. R-linierne og $I_2$-linierne synes først at vende om efter at have passeret linien $x = ½$, men dette er ikke bevist (og det er uvist om denne påstand har noget med Riemanns hypotese at gøre). Det er ganske fascinerende at se disse linier vokse frem fra skærmens venstre side. De R-linier som er nærmest x-aksen bøjer ind imod denne, skærer den og vender tilbage på den modsatte side af x-aksen, og af de øvrige R-linier er der nogle som skærer en I-linie (det kan være såvel en $I_1$- som en $I_2$-linie), men dette sker selvfølgelig netop på linien $x = ½$. R-linierne kan have et mere nuanceret udseende end det som fremgår af disse billeder: det kan nemlig vises at der er R-linier som, inden de vender tilbage, er snoet i en spiral, og en sådan kan endda have ligeså mange vindinger det skal være. Dette fænomén foregår dog så langt væk at det nok aldrig vil vise sig på en computerskærm.

***

Til sidst hvordan Riemanns løste det omtalte integrationsproblem. Det integral som skal udregnes:

$$1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^z \log\zeta(z)\, dz/z,$$

kan også, ved en anden og mere harmløs partiel integration, omskrives til:

$$-1/(2\pi i \log x) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^z (d/dz)(\log\zeta(z)/z)\, dz,$$

men her er integranden fortsat ikke-meromorf. Integralet kan derfor ikke udregnes ved residueregning, men Riemann udregner det ved at udvikle $\zeta(z)$ som et uendeligt produkt og dermed $\log\zeta(z)$ som en uendelig sum.

For at få produktet sætter Riemann

$$\xi(z) = z(z-1)\, \pi^{-z/2}\, \Gamma(z/2)\, \zeta(z).$$

Dette er en meromorf funktion som ikke har nogen poler: faktoren z vil ophæve den simple pol $z = 0$ for $\Gamma(z/2)$, og de øvrige poler for $\Gamma(z/2)$ som også er simple vil ophæve de trivielle nulpunkter for $\zeta(z)$ (dvs. punkterne $-2k$, $k = 1, 2, ...$) som er simple nulpunkter, og faktoren $(z - 1)$ vil ophæve den simple pol $z = 1$ for $\zeta(z)$. Funktionen $\xi(z)$ er altså *hel:* den kan, ud fra ethvert punkt, skrives som en potensrække med konvergensradius $\infty$. Riemann viser en sådan potensrække som konvergerer meget hurtigt. Og ud fra dette slutter han at der gælder den uendelige produktfremstilling:

$$\xi(z) = \xi(0) \prod_{\rho} (1 - z/\rho),$$

hvor $\xi(0) = -\zeta(0) = ½$ og hvor produktet er over alle nulpunkterne for $\xi(z)$, hvilket netop er alle de ikke-trivielle nulpunkter $\rho$ for $\zeta(z)$. En sådan produktfremstilling, som jo, bortset fra at den er uendelig, har samme form som produktfremstillingen af et komplekst polynomium (side ...), er ikke en selvfølge for en hel funktion. Den gælder for sin og cos (side ...), men den gælder ikke for exp, da exponentialfunktionen jo slet ikke har nogen nulpunkter, og den gælder heller ikke for den hele funktion $1/\Gamma(z)$, hvis nulpunkter er punkterne $-m$, $m = 0, 1, 2, ...$ (jvf. Gauss' produktfremstilling, side ...). Og Riemanns argumentation er uklar. At produktfremstillingen ikke destomindre *er* korrekt, altså at "$\xi(z)$ er et polynomium af uendelig orden", blev bevist seriøst af Hadamard i 1893.

Ud fra denne produktfremstilling af $\xi(z)$, som giver en sumfremstilling af $\log\xi(z)$, og ud fra sumfremstillingen:

$$\log(z\Gamma(z/2)) = \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (z \log(1+1/k)/2 - \log(1+z/(2k)))$$

(side ...), fås en uendelig sumfremstilling af $\log\zeta(z)$. Og når denne indsættes i integralformlen, vil kun leddene af formen $\log(1 - z/\rho)$, hvor $\rho$ gennemløber *alle* nulpunkterne $\rho$ for $\zeta(z)$, samt leddet $\log(z - 1)$ (hidhørende fra dennes pol $z = 1$) komme til at bidrage, idet de øvrige led dels er tallet $\log\xi(0) - \log 2$ og dels er led af formen $\alpha z$, og hvert af disses bidrag til integralet er 0. Resultatet af udregningerne som fører frem til funktionen $\mathrm{Li}(x^\rho)$ er (idet $a > \mathrm{Re}(\rho)$):

$$1/(2\pi i \log x) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^z \, (d/dz)(\log(1 - z/\rho)/z) \, dz = \int_{-\infty}^{1} x^{\rho t} \, dt/t \quad \text{for } \mathrm{Re}(\rho) > 0$$

$$= \int_{1}^{\infty} x^{\rho t} \, dt/t \quad \text{for } \mathrm{Re}(\rho) < 0.$$

Disse formler fås simpelthen ved at differentiere begge sider af lighedstegnene mht. $\rho$, derfor skal der til højresiderne strengt taget adderes konstanter, men disse er hinandens modsatte tal for $\rho$ og $\underline{\rho}$, og forsvinder derfor ud af udregningerne.

Forresten, vi har glemt tallet $\varepsilon$ som kan være 0 eller ½ i Riemanns formel for $\pi_N$ (se side ...), på hvilket trin i beviset skulle dette tal have været tilføjet?

## Udledning af Sylvesters formel for $\nu_N$

Som sagt tales der i Apostolos Doxiadis' roman om en "cirkelmetode" som Hardy & Littlewood tillagde stor betydning, da den var *den eneste vej* til et bevis for Goldbachs formodning. Princippet i denne metode har vi faktisk været inde på: vi har nemlig bevist at hvis C er en cirkel med centrum i origo og n er et helt tal, er

$$1/(2\pi i) \int_C z^n \, dz = 1 \text{ hvis } n = -1 \text{ og } = 0 \text{ hvis } n \neq -1,$$

og dette betyder at hvis

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

er en potensrække, er

$$a_n = 1/(2\pi i) \int_C f(z)/z^{n+1} \, dz,$$

hvis radius af C er mindre end potensrækkens konvergensradius. Så hvis koefficienterne i f(z) er givet ved $a_n = \nu_n$ (antallet af måder hvorpå n kan skrives som en sum af to primtal), og hvis vi kan finde et godt udtryk for f(z) som gør os i stand til at udregne dette integral, så har vi en formel for $\nu_n$, og så har vi bevist Goldbachs formodning, da vi ud fra formlen let må kunne se at $\nu_n \neq 0$ for n lige. Denne potensrække f(z) har i hvert fald en elegant form, den er nemlig kvadratet på den potensrække vi tidligere har studeret (side ...):

$$\sum_{p \text{ ulige primtal}} z^p.$$

De to matematikere fornemmede at man ad denne vej kan udlede en formel for $\nu_n$, hvis vigtigste bestanddel er den tilnærmelsesformel som Sylvester 50 år tidligere havde fundet ved sandsynligheds betragtninger. De var dog klar over at man i dette tilfælde ikke som i Riemanns tilfælde, kan finde en eksakt formel. Problemet er af en anden natur, idet Riemann skulle finde koefficienterne i en potensrække som er en *sumrække* hørende til en anden potensrække, nemlig rækken $\sum z^p$ (sum over primtallene). Potensrækken hørende til Riemanns problem, $\sum \pi_n z^n$, kan skrives som $(\sum z^n)(\sum z^p)$, og et sådant produkt der indeholder faktoren $\sum z^n$ er lettere at tackle end Hardy & Littlewoods produkt $(\sum z^p)^2$. Men Hardy & Littlewoods mål var jo også et andet: de skulle blot udlede Sylvesters formel og have en smule kontrol over den fejl man begår ved at bruge den. Men faktisk *kunne* de godt ved deres metode have forfinet Sylvesters formel betydeligt. Det gjorde de dog ikke, fordi de, hvis de søgte direkte efter en formel for $\nu_n$, ville løbe ind i det samme problem som Riemann måtte slås med, nemlig at skulle integrere en ikke-meromorf funktion. Og denne besværlighed var der ingen grund til at have nu hvor det bare gjaldt om at bevise at $\nu_n \neq 0$. Hardy & Littlewood opdagede, at man kan undgå ikke-meromorfe funktioner, hvis man i stedet for at lade $\nu_n$ være antallet af opspaltninger af formen $n = p + q$, hvor p og q er primtal, lader $\nu_n$ være summen af tallene (logp)(logq) for alle disse opspaltninger – dette tal betegner vi nu $\underline{\nu}_n$. Og det er klart at $\nu_n \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\nu}_n \neq 0$. I så fald er potensrækken f(z) givet ved kvadratet på potensrækken

$$g(z) = \sum_{p \text{ ulige primtal}} \log p \; z^p,$$

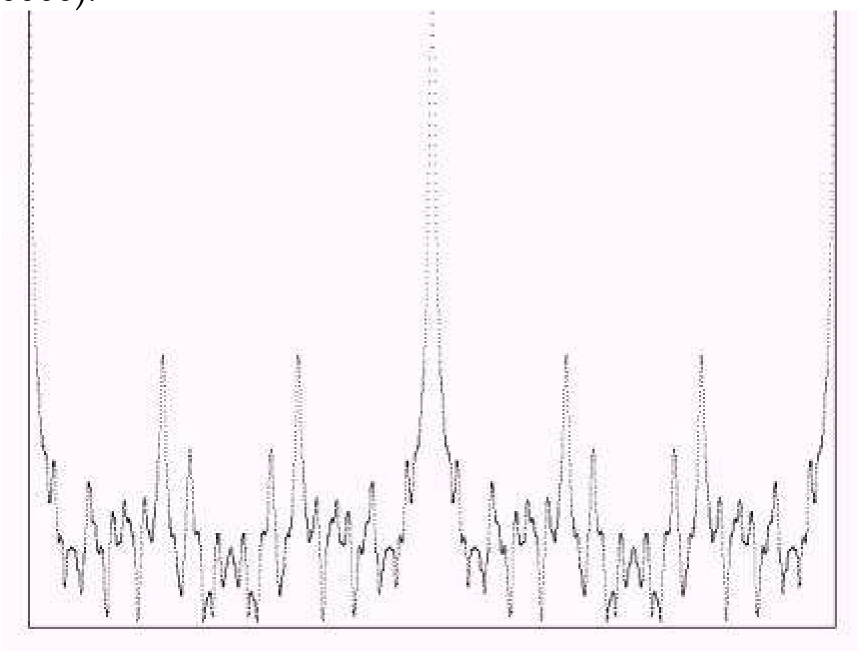
og denne række viser sig at være lettere at håndtere end $\sum z^p$.

Vi har altså at

$$\underline{\nu}_n = 1/(2\pi i) \int_C g(z)^2/z^{n+1}\, dz,$$

og cirkelmetoden består i at opdele cirklen C i en antal stykker $C_i$, i = 1, 2, ..., M, og udregne det vigtigste bidrag til integralet fra hvert af disse stykker, og derefter lade M gå imod ∞. Det viser sig ulykkeligvis, at det er nødvendigt at foretage grove forenklinger i flere trin, og hver gang bliver der en fejl som indregnes i et restled som får større og større betydning, og som Hardy & Littlewood mistede kontrollen over. Men Hardy & Littlewood kunne se på formlerne at hvis man generaliserer problemet, således at man i stedet for at lade $\nu_n$ være antallet af opspaltninger af n i summen af *to* primtal, lader $\nu_n$ være antallet af opspaltninger af n i summen af r primtal, for et givet tal r *større* end 2, så kan man vurdere restleddet. I dette tilfælde kunne de vise, at hvis man forudsætter en "mild Riemann hypotese" for de såkaldte L-funktioner som vi skal indføre nedenfor, så vil restleddet $R_n$ få relativ forsvindende betydning for $n \to \infty$ (dvs. $R_n/\nu_n \to 0$ for $n \to \infty$). Under alle omstændigheder er deres metode en lækkerbisken for enhver matematikinteresseret – undtagen onkel Petros i Apostolos Doxiadis' roman! - så derfor vil jeg nu gennemgå den. Vi holder os til tilfældet r = 2, dvs. til Goldbachs formodning.

Stykkerne $C_i$ skal selvfølgelig være centreret omkring de punkter på C hvor g(z) er numerisk størst. Men det viser sig at g(z) varierer vildt langs C: når C har lille radius er variationen af g(z) selvfølgelig lille (da g(z) er analytisk), men når radius af C nærmer sig konvergensradius for g(z) bliver variationen af g(z) mere og mere kaotisk (ikke destomindre er integralet rundt langs C som vi véd uafhængigt af radius af C). Mens potensrækken $\sum z^n$ (= z/(1-z)) blot aftegner en cirkel når z bevæger sig rundt langs C (og denne cirkel konvergerer imod linien x = -½ når radius af C går imod konvergensradius for rækken som er = 1), så aftegner potensrækken $\sum z^p$ (sum over alle primtallene > 2) en kurve som bliver mere og mere snoet når C's radius mærmer sig dens konvergensradius (som også er 1). Således varierer normen af punktet $\sum z^p$, når z bevæger sig rundt langs en cirkel med radius 0.98 (sum for primtallene op til 100000):



De punkter på cirklen som bidrager mest til integralet skal altså lokaliseres. Det viser sig (når man i første omgang blot foretager formale udregninger), at hvis man for ethvert punkt på cirklen definerer en *lokal* zetafunktion ud fra g(z), så er de søgte punkter de punkter hvor disse lokale zetafunktioner har størst *principalt residuum.* For alle de zetafunktioner som vi vil betragte i det følgende gælder, at *hvis* en sådan har simple poler, så er der en entydigt bestemt simpel pol $z_0$ som ligger længst tilhøjre, og denne er reel. Dette er funktionens *principale pol,* og dennes residuum kaldes funktionens *principale residuum.* Det viser sig også, at disse punkter på cirklen er *rationale retninger,* dvs. deres vinkler er af formen (h/k)2π, hvor h/k er en ægte brøk. Når vi i det følgende skriver h/k, er k et naturligt tal og h er et af tallene 1, 2, ..., k-1, og h og k er indbyrdes primiske - når k = 1 er h = 0.

Til den ægte brøk h/k definerer vi den lokale zetafunktion $Z^{h/k}(z)$ ved

$$Z^{h/k}(z) = \sum_{p \text{ ulige primtal}} e^{p(h/k)2\pi i} \log p/p^z$$

(for Re(z) > 1). Vi skal nu bruge formlen for funktionen $e^{-t}$ (t > 0) som vi har udledt på side ...:

$$e^{-t} = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, t^{-z}\, dz,$$

hvor a > 0. Denne ligning gælder umiddelbart kun for positive t, men venstresiden er jo en hel funktion af t, og i højresiden er potensen $t^{-z}$ veldefineret når Re(t) > 0 (da θ = arg(t) i så fald varierer i intervallet -π/2 < θ < π/2), derfor definerer højresiden en funktion i halvplanen Re(t) > 0, og denne er holomorf og derfor (ifølge Riemanns identitetssætning, side ...) identisk med $e^{-t}$ (for Re(t) > 0).

Når vi sætter $z = e^{(h/k)2\pi i} e^{-t}$ i $g(z) = \sum \log p\, z^p$ og bruger denne formel får vi at

$$g(e^{(h/k)2\pi i} e^{-t}) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} t^{-z}\, \Gamma(z)\, Z^{h/k}(z)\, dz,$$

idet a nu skal ligge tilhøjre for den principale pol for $Z^{h/k}(z)$. Hvis b > 0 er givet ved $e^{-b}$ = radius af C, har vi derfor

$$\underline{\nu}_n = 1/(2\pi i) \int_C g(z)^2/z^{n+1}\, dz$$

$$= \sum_{i=1}^{M} 1/(2\pi i) \int_{Ci} g(z)^2/z^{n+1}\, dz$$

$$= \sum_{h/k} e^{-n(h/k)2\pi i}/(2\pi i) \int_{b-\theta^- i}^{b+\theta+i} e^{nt} \left(1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} t^{-z}\, \Gamma(z)\, Z^{h/k}(z)\, dz\right)^2 dt,$$

hvor summen over h/k er over *de* M retninger hvor $Z^{h/k}(z)$ har størst principalt residuum, og hvor $\theta^-$ og $\theta^+$er således at $e^{(h/k)2\pi i}e^{-(b-\theta-i)}$ og $e^{(h/k)2\pi i}e^{-(b+\theta+i)}$ er endepunkterne af et passende buestykke af C omkring punktet på C svarende til h/k, dvs. punktet $e^{(h/k)2\pi i}e^{-b}$ (bemærk at punkterne $t = b-\theta^- i$ og $t = b+\theta^+ i$ ligger henh. lige under og lige over punktet $b > 0$). For at kunne finde disse h/k-er, må vi kende den principale pol af $Z^{h/k}(z)$ og dens residuum. Og hertil må vi udtrykke $Z^{h/k}(z)$ ved en anden zetafunktion:

Vi definerer zetafunktionen $\underline{Z}^{h/k}(z)$ ved

$$\underline{Z}^{h/k}(z) = \sum_{n \text{ således at } n=p^r \text{ for p ulige primtal}} e^{n(h/k)2\pi i} \log p/n^z$$

- den adskiller sig kun fra $Z^{h/k}(z)$ ved at der medtages flere led, idet ikke bare p men også alle potenserne af p skal tages i betragtning (jvf. rækken på side ...). Denne zetafunktion har den fordel at den kan udtrykkes ved en type zetafunktioner som i talteoretisk sammenhæng er en nærliggende generalisation af Riemanns zetafunktion, nemlig *Dirichlets L-funktioner.* Disse er zetafunktioner af formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^z$$

(for $\mathrm{Re}(z) > 1$), hvor $\chi(n)$ er en talteoretisk funktion af en særlig type: der findes et naturligt tal k således at $\chi(n)$ er en *karakter* på gruppen $(Z/kZ)^*$. Z er mængden af alle de hele tal, Z/kZ er mængden af restklasserne modulo k, og $(Z/kZ)^*$ er gruppen af de invertible elementer i Z/kZ mht. multiplikation. En karakter $\chi$ på $(Z/kZ)^*$ er en homomorfi fra gruppen $(Z/kZ)^*$ ind i gruppen af de komplekse tal med norm 1 (dvs. enhedscirklen). Antallet af elementer i $(Z/kZ)^*$ betegnes $\phi(k)$, og den herved definerede talteoretiske funktion kaldes *Eulers funktion.* $\phi(k)$ er altså antallet af tal $h = 1, 2, ..., k-1$ som er primiske med k. Hvis k' og k'' er indbyrdes primiske er $\phi(k'k'') = \phi(k')\phi(k'')$, og hvis p er et primtal er $\phi(p^{r+1}) = p^r(p-1)$. Mængden af karakterer på $(Z/kZ)^*$ har samme antal elementer som $(Z/kZ)^*$, altså $\phi(k)$. Vi kan derfor numerere karaktererne på $(Z/kZ)^*$ ved tallene $r = 1, 2, ..., \phi(k)$ - til $r = 1$ svarer altid den trivielle karakter $\chi \equiv 1$. En karakter $\chi$ på $(Z/kZ)^*$ bestemmer en funktion $\chi(n)$ på mængden af alle de naturlige tal: for n ikke-primisk med k sættes $\chi(n) = 0$ og for n primisk med k er $\chi(n)$ værdien af $\chi$ på det til n svarende element i $(Z/kZ)^*$.

Det gælder iøvrigt at hvis vi ud fra den talteoriske funktion $\phi(n)$ danner en zetafunktion på samme måde som zetafunktionen for $\mu(n)$ (side ...), er denne givet ved $\zeta(z - 1)/\zeta(z)$, dvs. vi har (for $Re(z) > 2$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)/n^z = \zeta(z - 1)/\zeta(z).$$

For et givet k, defineres en L-funktion for hver af de $\phi(k)$ karakterer $\chi_r$, $r = 1, 2, ..., \phi(k)$ ved:

$$L_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_r(n)/n^z = \prod_{p \text{ primtal}} (1 - \chi_r(p)/p^z)^{-1}$$

(for $Re(z) > 1$, jvf. Eulers produktfremstilling, side ...). Disse funktioner kan ligesom Riemanns zetafunktion udvides meromorft til hele den komplekse plan, de tilfredsstiller en analog funktionalligning, og Riemanns hypotese for $L_r(z)$ siger at alle nulpunkterne i halvplanen $Re(z) > 0$ (der er uendelig mange) opfylder $Re(z) = ½$. Bemærk at for $r = 1$ er $L_r(z)$ ikke Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$, men funktionen

$$\zeta(z) \prod_{p \text{ primfaktor i } k} (1 - 1/p^z).$$

$L_1(z)$ har altså ligesom $\zeta(z)$ simpel pol i $z = 1$ (og den har ikke andre poler end denne) og dens residuum er produktet af tallene $(1 - 1/p)$ for primfaktorerne p i k. For $r \neq 1$ er $L_r(z)$ en hel funktion (dvs. den har ingen poler).

I 1839 viste Dirichlet at for et naturligt tal k og et tal h som er primisk med k, er der uendelig mange primtal i den restklasse modulo k som indeholder h (*Dirichlets sætning*). Eller sagt med andre ord: i enhver differensrække hvis differens og begyndelsestal er indbyrdes primiske er der uendelig mange primtal (f.eks. er der uendelig mange primtal af formen 14+15n). Dette kan slet ikke vises ligeså elementært som det at der er uendelig mange primtal. Dirichlet viste at zetafunktionen

$$\sum_{\substack{n \text{ således at } n=p^r \text{ for } p \text{ primtal} \\ \text{og således at } n\equiv h \text{ modulo } k}} \log p/n^z$$

kan skrives som

$$-1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \chi_r(h)^{-1}\, L_r'(z)/L_r(z),$$

og heraf følger umiddelbart at den har pol i z = 1, dvs. at rækken

$$\sum_{\substack{n \text{ således at } n=p^r \text{ for } p \text{ primtal} \\ \text{og således at } n\equiv h \text{ modulo } k}} \log p/n$$

er divergent, og dette betyder at delrækken $\sum \log p/p$ (sum over primtallene p således at $p \equiv h$ mod k) også er divergent (da resten af rækken er konvergent), ergo er der uendelig mange primtal af denne type.

Nu tilbage til Hardy & Littlewood. De viste at zetafunktionen $\underline{Z}^{h/k}(z)$ kan udtrykkes ved L-funktioner på en måde som er ganske analog med Dirichlets formel, nemlig som:

$$\underline{Z}^{h/k}(z) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \kappa_r(h/k)\, L'_r(z)/L_r(z),$$

hvor

$$\kappa_r(h/k) = \sum_{j=1,\ j \text{ primisk med } k}^{k-1} e^{j(h/k)2\pi i}/\chi_r(j)$$

(j gennemløber de $\phi(k)$ tal i $(Z/kZ)^*$). For r = 1 har vi

$$\kappa_1(h/k) = \sum_{j=1}^{k-1} e^{j(h/k)2\pi i} = \sum_{j=1}^{k-1} e^{(j/k)2\pi i}$$

(j primisk med k), og dette tal er netop $\mu(k)$ (prøv at vise dette i nogle eksempler ved at tegne retningerne j/k på enhedscirklen). Så derfor kan vi ud fra det ovenstående (og sætningen om poler for en funktion af formen $f'(z)/f(z)$, side ...) slutte at $\underline{Z}^{h/k}(z)$ har principal pol i $z = 1$ med residuum $\mu(k)/\phi(k)$.

Ganske analogt til formlen på side ... har vi at:

$$Z^{h/k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\, \underline{Z}^{h/k}(mz),$$

derfor har $Z^{h/k}(z)$ principal pol i $z = 1$ med residuum $\mu(k)/\phi(k)$.

Nu kan vi fortsætte vores udregning af $\underline{\nu}_n$:

$$\underline{\nu}_n = \sum_{h/k} e^{-n(h/k)2\pi i}/(2\pi i) \int_{b-\theta^- i}^{b+\theta^+ i} e^{nt}\, \Big(1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} t^{-z}\, \Gamma(z)\, Z^{h/k}(z)\, dz\Big)^2\, dt$$

$$= \sum_{h/k} e^{-n(h/k)2\pi i}\, (\mu(k)/\phi(k))^2\, \Big(1/(2\pi i) \int_{b-\theta^- i}^{b+\theta^+ i} e^{nt}\, t^{-2}\, dt\Big) + \text{restled},$$

idet vi har udregnet den vigtigste del af det andet integral ved residueregning: denne del er $t^{-1}\Gamma(1)$ $(= t^{-1})$ gange residuet af $Z^{h/k}(z)$ i $z = 1$ $(= \mu(k)/\phi(k))$. Det resterende integral - som går fra $b-\theta^- i$ til $b+\theta^+ i$ (og hvor $\theta^-$ og $\theta^+$ er bestemt ved h/k) - er håbløst at udregne, men hvis vi erstatter de bittesmå tal $\theta^-$ og $\theta^+$ med $\infty$, hvilket synes vanvittigt, så er det let at udregne:

$$1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{nt}\, t^{-2}\, dt = n$$

(indsæt rækkeudviklingen af $e^{nt}$ og anvend residueregning). Så med denne forenkling, og den vi har foretaget ved at se bort fra de ikke-principale residuer af $\Gamma(z)Z^{h/k}(z)$, har vi at

$$\underline{\nu}_n = n \sum_{k} \Big(\sum_{h} e^{-n(h/k)2\pi i}\Big)(\mu(k)/\phi(k))^2 + \text{restled},$$

hvor den første sum er over k = 1, 2, ... op til et stort tal og den anden sum er over h = 1, 2, ..., k-1 og h primisk med k, idet dog h = 0 for k = 1. At gøre inddelingen af cirklen finere og finere svarer til at lade det store tal gå imod ∞. Da det viser sig at den derved fremkomne uendelige række faktisk er konvergent og at summen netop er produktudtrykket i Sylvesters formel, har vi åbenbart været på rette vej. Vi kan udregne rækken således: Hvis vi kalder tallene efter det første sumtegn $A_k$, gælder at $A_{k'k''} = A_{k'}A_{k''}$ når k' og k'' er indbyrdes primiske og at $A_k = 0$ når k er en højere potens af et primtal. Men dette betyder at summen er produktet af tallene $(1+A_p)$, hvor p løber over alle primtallene. Og da $A_p = -1/(p-1)^2$ hvis p ikke er divisor i n og $A_p = 1/(p-1)$ hvis p er divisor i n, har vi alt ialt at formlen giver 0 for n ulige og at den for n lige er:

$$\underline{\nu}_n = 2\prod_{\text{p ulige primtal}}(1-1/(p-1)^2) \prod_{\substack{\text{p ulige primtal}\\ \text{som går op i n}}}((p-1)/(p-2))\, n + \text{rested.}$$

$\underline{\nu}_n$ er jo ikke antallet af måder hvorpå n kan skrives som summen af to primtal, men derimod summen af tallene (logp)(logq) for disse opspaltninger. Hardy & Littlewood viser dog at hvis man dividere $\underline{\nu}_n$ med $(\log n)^2$, får man en tilnærmelse til $\nu_n$, og den resulterende formel er Sylvesters formel:

$$\nu_n \approx 2\prod_{\text{p ulige primtal}}(1-1/(p-1)^2) \prod_{\substack{\text{p ulige primtal}\\ \text{som går op i n}}}((p-1)/(p-2))\, n/(\log n)^2.$$

Den tilnærmelsesformel vi er nået frem til på denne indirekte måde, er dårlig i forhold til den vi kunne have fået, hvis vi ligefra begyndelsen havde arbejdet med potensrækken $\sum z^p$ og havde indstillet os på integration af en ikkemeromorf funktion. Jeg skal blot nævne, at dette fører til at $t^{-1}\Gamma(1)$ i udregningen ovenfor skal erstattes med integralet

$$\int_{-\infty}^{1} t^{-x}\,\Gamma(x)\,dx,$$

og at $n/(\log n)^2$ i Sylvesters formel derved bliver erstattet med integralet

$$\int_0^n dx/(\log(n-x)\log(n+x)).$$

Den herved fremkomne tilnærmelsesformel er, som vi har set ved at køre programmet "Goldbachs formodning", ganske god.

Som sagt kunne Hardy & Littlewood bevise at restleddet i deres formel for $\nu_n$ er af forsvindende betydning, når $\nu_n$ er antallet af opspaltninger af n i r primtal, hvor r > 2. Dog kun under forudsætning af at Dirichlets L-funktioner opfylder en mild Riemann hypotese, nemlig at nulpunkterne $\rho$ med $\mathrm{Re}(\rho) > 0$ har $\mathrm{Re}(\rho) < 3/4$. Det lykkedes 15 år senere for Vinogradov at bevise at den milde Riemann hypotese kan udværes. Vinogradov skrev formlen for $\nu_n$ (i tilfældet r = 2, dvs. Goldbachs formodning):

$$\nu_n = 1/(2\pi i) \int_C g(z)^2/z^{n+1}\, dz,$$

på formen

$$\nu_n = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} g_n(e^{\theta i})^2\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

hvor $g_n(z)$ er den *endelige* række:

$$g_n(z) = \sum_{p \text{ primtal},\, 2<p<n} z^p.$$

Vi behøver jo ikke de øvrige (uendelig mange) led i g(z), og når disse undværes kan der integreres langs selve enhedscirklen. Og denne endelige sum var han i stand til at estimere omkring de rationale punkter på enhedscirklen, ved at benytte en talteoretisk sætning som umiddelbart forinden var blevet bevist: Siegel-Walfisz' sætning (1936). Hadamard og La Vallée-Poussin havde bevist at $\pi_N/\mathrm{Li}(N) \to 1$ for $N \to \infty$ (side ...) , men de havde ydermere vist at der findes et positivt tal B således at talfølgen

$$(\pi_N - \mathrm{Li}(N))(e^{B\sqrt{\log N}})/N$$

er begrænset (denne påstand er selvfølgelig meget svagere end påstanden på side ... som er ækvivalent med Riemanns hypotese). Siegel-Walfisz' sætning siger blot, at dette også gælder når man i udregningen af $\pi_N$ begrænser sig til de primtal der er i en restklasse k+nh, n = 0, 1, 2, ... (k og h indbyrdes primiske), idet man så skal dividere Li(N) med $\phi(k)$ (antallet af h primiske med k) og idet k er forudsat mindre end $(\log N)^C$ (C er et fast positivt tal).

Vinogradov viste nemlig ud fra dette, at lige omkring det rationale punkt h/k er:

$$\left| g_n\left(e^{((h/k)+\varepsilon)2\pi i}\right) - \mu(k)/\phi(k) \sum_{m=2}^{n} e^{m(h/k)\varepsilon 2\pi i}/\log m \right| < A\, n/e^{B\sqrt{\log n}},$$

idet der findes et positivt tal A og en (lille) omegn af 0 således at uligheden gælder for $\varepsilon$ tilhørende denne omegn. Og denne estimation er god nok til at bevise at restleddet i formlen for $\nu_n$ er af forsvindende betydning, *ikke* i tilfældet Goldbachs formodning hvor det er $g_n(z)^2$ der optræder, men i det generaliserede tilfælde hvor det er $g_n(z)^r$ ($r > 2$) der optræder.

Sætter vi $\varepsilon = 0$, får vi en tilnærmelse til værdien af $g_n(z)$ på de rationale punkter $z = e^{(h/k)2\pi i}$ på enhedscirklen (programmet "Vinogradov"). Vi anede i forvejen at faktoren $\mu(k)/\phi(k)$ skal være der, men nu véd vi at forholdet imellem $g_n(e^{(h/k)2\pi i})$ og $\mu(k)/\phi(k) \sum 1/\log m$ (sum fra m = 2 til m = n) konvergerer imod 1 for $n \to \infty$. Bemærk at dette sidste tal er reelt, så den imaginære del af tallet $g_n(e^{(h/k)2\pi i})$ er åbenbart af forsvindende betydning. At værdien af $g_n(z)$ er næsten reel når z er et rationalt punkt på enhedscirklen, er overraskende. Dog, for $z = i$ betyder det at der er næsten lige mange primtal af formen 4k + 1 og 4k - 1. For $n = 10^6$ har vi følgende reelle værdier af rækkerne for h/k lige omkring 1/3:

| $h/k$ | $g_n(e^{(h/k)2\pi i})$ | $\mu(k)/\phi(k) \sum_{m=2}^{n} 1/\log m$ |
|---|---|---|
| 75/226 = 0.332 | 692 | 702 |
| 1/3 = 0.333 | -39247 | -39314 |
| 76/225 = 0.338 | 19 | 0 |

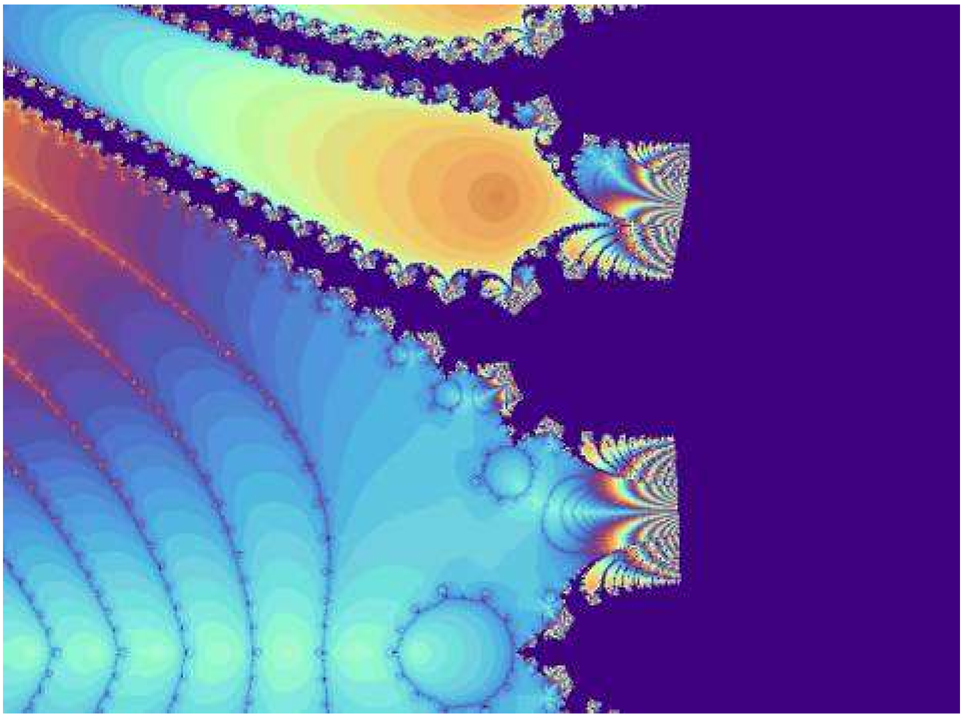
Det er disse mægtige udsving figuren på side ... viser. Og nu har vi fået svaret på spørgsmålet (side ...) om nulpunkterne for primtalspotensrækken

$$g(z) = \sum_{p \text{ ulige primtal}} z^p.$$

Nemlig: $g(z)$ har ingen mening på enhedscirklen, men den polynomiale tilnærmelse $g_n(z)$ til $g(z)$ har (for n stor) relativ lille værdi i de punkter på enhedscirklen hvis retning $h/k$ har en nævner k som indeholder en primfaktor mere end én gang.

**- og til allersidst endnu en fraktal**

De ikke-trivielle nulpunkter for Riemanns zetafunktion $\zeta(z)$ fandt vi ved først at lokalisere dem ved hjælp af grafen for funktionen på side ..., og derefter på disse tilnærmelser at anvende Newtons iterationsprocedure $z \to z - \zeta(z)/\zeta'(z)$. Men vi skal selvfølgelig da se Fatou-mængden for denne famøse iteration (programmet "Zeta" i mappen "Newton"). Og hvem véd? - måske kan vi ved at studere denne bevise Riemanns hypotese! Et sådant studium har ingen måske foretaget endnu, ja måske er vi de første som ser denne fraktal, og selv om jeg ikke selv er nået frem til noget ved at kigge på den, så kan læseren måske få en lys idé (på billedet er x-aksen symmetriaksen forneden og centrum af det brune cirkelsystem er det første ikke-trivielle nulpunkt (0.5, 14.1347...):



I programmet hvor Newtons iterationsprocedure $z \to z - \zeta(z)/\zeta'(z)$ blot skulle tjene til at finde nulpunkterne for $\zeta(z)$ på linien $x = ½$, kunne vi nøjes med Euler-Maclaurins formel for $\zeta(z)$ og den afledede af denne, men nu skal vi kende $\zeta(z)/\zeta'(z)$ i hele planen, så derfor må vi have en formel som også gælder for z langt til venstre for y-aksen. Og den kan vi få ud fra Riemanns funktionalligning. Hvis vi nemlig differentierer denne og dividerer med $\zeta(1-z)$, får vi, idet vi erstatter z med 1-z, at

$$\zeta'(z)/\zeta(z) = \log(2\pi) + (\pi/2)\cos(z\pi/2)/\sin(z\pi/2) - \Gamma'(1-z)/\Gamma(1-z) - \zeta'(1-z)/\zeta(1-z)$$

Forekomsten her af $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ betyder at vi også skal have en formel for denne som gælder for alle z. Og den kan vi få ved at differentiere Euler-Maclaurins formel for $\log\Gamma(z)$, så har vi en formel for $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ som gælder for z tilhørende en strimmel $7 \le \mathrm{Re}(z) < 8$ (f.eks.), og ud fra denne kan vi udregne $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ for et vilkårligt z ved:

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z) = \Gamma'(z+N)/\Gamma(z+N) - 1/z - \ldots - 1/(z+N-1)$$

og

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z) = \Gamma'(z-N)/\Gamma(z-N) + 1/(z-1) + \ldots + 1/(z-N)$$

- de fås ved at differentiere ligningerne på side ....

Og nu hvor vi har en formel for $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ kan vi også tegne Fatou-mængden for gammafunktionen $\Gamma(z)$. Eller rettere for den reciproke funktion $1/\Gamma(z)$, for $\Gamma(z)$ har jo ingen nulpunkter, kun poler, men for $1/\Gamma(z)$ er det omvendt, så denne er derfor et ideelt objekt for Newton-iteration. Da den afledede af $1/\Gamma(z)$ er $-\Gamma'(z)/\Gamma(z)^2$ , kommer Newtons iterationsprocedure for $1/\Gamma(z)$ til at lyde: $z \rightarrow z + \Gamma(z)/\Gamma'(z)$. Men da gammafunktionen slet ikke er så spændende som zetafunktionen, er den fraktal der kommer frem (programmet "Gamma" i mappen "Newton") ikke videre ophidsende (nu hvor vi er blevet vænnet til at se det utroligste) - den svarer nogenlunde til den vi har set for sinus.

Riemann fortalte os (side ...) at et eventuelt nulpunkt som ikke ligger på linien $x = ½$, vil bestå af et par af nulpunkter som ligger symmetrisk om denne linie: hvis et nulpunkt ρ ikke ligger på linien $x = ½$, dvs. hvis $\rho = (½+\varepsilon)+iy$, hvor $\varepsilon \neq 0$, da er punktet $\rho' = (½-\varepsilon)+iy$ også et nulpunkt (thi hvis ρ er et nulpunkt, vil såvel det konjugerede tal $\underline{\rho}$ som tallet $1-\rho$ være et nulpunkt, dette sidste som følge af funktionalligningen). *Hvis* der nu fandtes to nulpunkter ρ og ρ' symmetrisk om linien $x = ½$, hvor ville da punktet $\rho_0$ midt imellem disse itereres hen ved $z \rightarrow z - \zeta(z)/\zeta'(z)$ ? Det ville vel tilhøre Julia-mængden, og dets iteration ville vel være ∞, hvilket ville betyde at $\zeta'(\rho_0) = 0$. Og dette ville igen betyde at kurven som vi bruger til at lokalisere nulpunkterne, i dette punkt ville have en top som ligger under x-aksen eller en dal som ligger over x-aksen. Det er faktisk dette fænomén man har interesseret sig mest for i forsøget på at bevise Riemanns hypotese, idet man har forsøgt at bevise at det ikke kan finde sted, altså at kurven ikke kan gå ned imod x-aksen og derefter op igen uden at have passeret x-aksen, og tilsvarende nedefra. Man har fundet flere steder hvor det er lige ved at gå galt, og kurven opfører sig meget uroligt i disses omegn (som om den véd at den er på forbudte veje). Dette kaldes et *Lehmer fænomén.* Prøv at se grafen fra y = 17140 til 17150. Se også R- og I-linierne på dette sted (x = 0.4, x-interval = 0.5, y = 17143.5).