Integration af komplekse funktioner

For at kunne udlede Riemanns formel for π_N og Sylvesters formel for ν_N får vi brug for et større apparatur af kompleks funktionsteori, så derfor må sætte os mere ind i denne teori: definere hvad et komplekst integral er og vise nogle sætninger - eller blot kontrollere dem med computeren.

Den funktion med komplekse værdier som vi har integreret i definitionen af Li(z), dvs. $f(x) = z^x/x$, hvor z er et komplekst tal, er kun defineret for reelle tal x og integrationen er foregået langs et interval på den reelle tallinie. En egentlig kompleks funktion f(z) derimod er defineret på et område O i den komplekse talplan, og hvis vi skal udvide vores forestilling om integration - som jo er en "uendelig" sum af formen $\sum f(x)\Delta x$ taget langs et interval - så den kommer til at indbefatte komplekse funktioner, er det mest nærliggende at lade dette interval være et *kurvestykke* indenfor O og erstatte Δx-erne med Δz-er langs dette kurvestykke. Altså: Hvis L er et kurvestykke beliggende i O, danner vi for et (lille) positivt tal ε et komplekst tal S_ε på følgende måde: Fra den ene ende af kurven til den anden afsættes punkter $z_0, z_1, ..., z_N$ således at z_0 er dens begyndelsespunkt og z_N er dens endepunkt og således at afstanden imellem to på hinanden følgende punkter er mindre end ε. Imellem z_k og z_{k+1} vælges et punkt z'_k på kurven og vi sætter

$$S_\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1} f(z'_k)\,(z_{k+1}-z_k).$$

Hvis disse komplekse tal S_ε, uafhængigt af vores valg, konvergerer imod et tal S for $\varepsilon \to 0$, kaldes f(z) integrabel langs kurven L og tallet S kaldes integralet af f(z) langs L og betegnes

$$\int_L f(z)\,dz.$$

I computersammenhæng har vi altså:

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{N-1} f(z'_k)\,(z_{k+1}-z_k),$$

for N tilstrækkeligt stort og ε tilstrækkeligt lille. Kurven kan selvfølgelig godt være uendelig lang, i så fald må integralet defineres som grænseværdien når en endelig del af kurven gøres længere og længere. Og kurven kan selvfølgelig også være lukket, således at dens begyndelsespunkt og endepunkt falder sammen. De kurver vi vil integrere over i det følgende er altid enten cirkler eller rette linier parallelle med y-aksen.

Hvis C er en cirkel med centrum i origo og n er et helt tal er:

$$\int_C z^n \, dz = 2\pi i \text{ hvis } n = -1 \text{ og } = 0 \text{ hvis } n \neq -1.$$

Thi hvis cirklens radius er r, har den parameterfremstillingen $z = re^{\theta i}$, hvor θ går fra 0 til 2π, og da $dz/d\theta = iz$, er

$$\int_C z^n \, dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)\theta i} \, d\theta,$$

og det sidste (reelle) integral er = 2π hvis n = -1 og = 0 hvis n ≠ -1 (fordi i så fald bidragene fra θ og $\theta+\pi/2^k$ ophæver hinanden, hvis k er givet ved $n+1 = 2^k m$ hvor m er ulige).

Integralet er altså uafhængigt af cirklens størrelse, men det er også uafhængigt af om den lukkede kurve *er* en cirkel - den skal blot omslutte nulpunktet (én gang). Så hvis en lukket kurve L omslutter punktet z_0 (én gang) gælder:

$$\int_L (z - z_0)^n \, dz = 2\pi i \text{ hvis } n = -1 \text{ og } = 0 \text{ hvis } n \neq -1$$

(bemærk at integralet kun er ≠ 0 når integranden $(z - z_0)^n$ *ikke* er defineret i punktet z_0, og det kun er for n = -1 at integralet er ≠ 0).

Men dette betyder, at hvis funktionen f(z) indenfor et område omkring punktet z_0 kan skrives på formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

og hvis L er en lukket kurve indenfor dette område som omslutter z_0 (én gang), da gælder:

$$\int_L f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}.$$

En kompleks funktion f(z) kaldes *meromorf* indenfor det åbne område O, hvis det for ethvert punkt z_0 i dette gælder at f(z) indenfor en (lille) omegn af z_0 kan skrives på formen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

f(z) er kun defineret i selve punktet z_0 hvis $a_n = 0$ for $n < 0$, dvs. hvis rækken er en potensrække, i så fald siges f(z) at være *analytisk* i punktet z_0. En kompleks funktion f(z) som er *holomorf* indenfor det åbne område O, dvs. kompleks-differentiabel overalt i O (side 58), er analytisk overalt i O, derfor kaldes en holomorf funktion også for en analytisk funktion. For en reel funktion gælder ikke at differentiabilitet i en omegn af x_0 (end ikke vilkårlig ofte differentiabilitet) medfører at den er analytisk i x_0, dvs. at den kan udvikles i en potensrække omkring x_0.

Hvis f(z) er meromorf i O og rækkeudvikles ud fra punktet z_0, gælder, at hvis $a_n = 0$ for $n < r$ og $a_r \neq 0$ har vi

$$f(z) = (z - z_0)^r\, g(z),$$

hvor g(z) er analytisk i punktet z_0 og $g(z_0) = a_r \neq 0$. Hvis $r > 0$ siges f(z) at have *nulpunkt* af *orden* r i punktet z_0, og hvis $r < 0$ siges f(z) at have *pol* af *orden* -r i punktet z_0. Et nulpunkt eller en pol af orden 1 kaldes *simpel*. Hvis f(z) har simpel pol i z_0, kaldes tallet a_{-1}, som er $\neq 0$, for denne pols *residuum*. I så fald gælder at

$$f(z) = a_{-1}/(z-z_0) + g(z),$$

hvor g(z) er analytisk i z_0, og at

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

f(z) har netop simpel pol i z_0, når denne grænseværdi eksisterer og ≠ 0.

Af det ovenstående følger at vi har denne sætning: hvis f(z) er meromorf i området O og L er en lukket kurve indenfor dette, da er:

$$\int_L f(z)\, dz = 2\pi i \text{ gange summen af } f(z)\text{'s residuer indenfor } L.$$

Riemanns zetafunktion ζ(z) er meromorf i hele den komplekse plan, dens eneste pol er z = 1, og denne er simpel med residuum 1:

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)\, \zeta(z) = 1$$

(dette kan f.eks. ses af formlen for ζ(z) som vi vil udlede i næste kapitel). Det formodes at alle nulpunkterne for ζ(z) er simple.

Eksempler på ikke-meromorfe funktioner er logaritmefunktionen log z og funktionen $Li(x^z)$, hvor x er et positivt reelt tal (side ...): disse har ikke nogen rækkeudvikling omkring punktet $z_0 = 0$. Da $dLi(x^z)/dz = x^z/z$ og $x^z \to 1$ for $z \to 0$, og da $d\log z/dz = 1/z$ opfører $Li(x^z)$ sig som log z omkring singulariteten $z_0 = 0$. Disse funktioner siges at have *logaritmisk pol* i punktet z = 0. Et eksempel på en meromorf funktion som har pol af orden ∞ (i punktet z = 0) er f(z) = exp(1/z).

Hvis området O er ubegrænset (f.eks. en halvplan) og hvis den lukkede kurve L (indenfor O) er uendelig lang, er f(z) (en meromorf funktion indenfor O) selvfølgelig kun integrabel langs L, hvis L kun omslutter endelig mange simple poler eller hvis, i tilfælde af at der er uendelig mange, den uendelige række af residuer er konvergent.

Et eksempel på en sådan funktion er *gammafunktionen* Γ(z), som blev indført af Euler og Gauss og som spiller en stor rolle i den højere analyse - og i resten af denne bog. Euler definerede den ved integralet:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^z/e^t \, dt/t$$

som er konvergent for Re(z) > 1, og Gauss definerede den ved det uendelige produkt (*Gauss' produktfremstilling*):

$$\Gamma(z) = (1/z) \prod_{k=1}^{\infty} ((1+1/k)^z/(1+z/k))$$

som er konvergent for $z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$. $\Gamma(z)$ er meromorf i hele den komplekse plan, og dens poler er netop disse punkter: $z = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. De er alle simple, og polen $-m$ har residuum $(-1)^m/m!$. $\Gamma(z)$ har ingen nulpunkter. Da en ret linie som er parallel med y-aksen og som skærer den positive x-akse kan opfattes som en (uendelig lang) kurve der omslutter alle disse poler (idet den kan opfattes en cirkel med uendelig radius), har vi:

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \Gamma(z) \, dz = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m/m! = 2\pi e^{-1} i,$$

hvor $a > 0$. Hvis vi vil kontrollere denne formel på computeren, kan vi omforme det komplekse integral til et reelt integral, da $\underline{\Gamma(z)} = \Gamma(\underline{z})$:

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \Gamma(z) \, dz = 2i \int_0^\infty \mathrm{Re}(\Gamma(a+yi)) \, dy.$$

Men vi behøver en formel som effektivt kan udregne $\Gamma(z)$, og en sådan viser vi i næste kapitel.

$\Gamma(z)$ tilfredsstiller funktionalligningen

$$\Gamma(z + 1) = z \, \Gamma(z),$$

og dette betyder at $\Gamma(n+1) = n!$ for et naturligt tal n (da $\Gamma(1) = 1$), og at (for et naturligt tal N):

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+N)/(z(z+1)\ldots(z+N-1))$$

og

$$\Gamma(z) = \Gamma(z-N)\ (z-1)...(z-N),$$

hvilket betyder at $\Gamma(z)$ let kan udregnes når man blot kender $\Gamma(z)$ for de z for hvilke $1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2$ (f.eks.). $\Gamma(z)$ tilfredsstiller desuden funktionalligningerne

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\pi/(z \sin(\pi z)),$$

hvoraf følger at $\Gamma(½) = \sqrt{\pi}$, og

$$\Gamma(2z) = (2^{2z-1}/\sqrt{\pi})\ \Gamma(z)\Gamma(½ + z).$$

De følger begge af Gauss' produktfremstilling. Den første ved at benytte denne produktfremstilling for sinus (gældende for alle z):

$$\sin z = z \prod_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} (1 - z/(\pi k)).$$

Den anden ved at vise at $\Gamma(2z) = K\ 2^{2z}\ \Gamma(z)\Gamma(½ + z)$, hvor K er en konstant, og derefter finde K ved at sætte z = 1: $\Gamma(2) = 1 = K\cdot 4\cdot 1\cdot ½\cdot\Gamma(½)$, dvs. $K = 1/(2\sqrt{\pi})$.

Af produktfremstillingen for sin z fås ved anvendelse af formlen for differentation af et produkt (brugt på et uendeligt produkt) og af sin' z = cos z at:

$$\cos(z)/\sin(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(z + \pi k)$$

(gældende for $z \neq k\pi$, k hel). Indsætter vi her $\cos z = (e^{zi} + e^{-zi})/2$ og $\sin z = (e^{zi} - e^{-zi})/(2i)$ (de kan udledes af formlen $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ ved at sætte x = 0 og lade y være kompleks) og erstatter vi z med $-iz/2$ har vi (til senere brug):

$$1/(e^z - 1) + ½ = ½(e^{z/2} + e^{-z/2})/(e^{z/2} - e^{-z/2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(z + k2\pi i).$$

En sådan sum af tal a_k fra $k = -\infty$ til ∞ skal opfattes som a_0 + summen af tallene a_k+a_{-k} fra k = 1 til ∞, og tilsvarende for et produkt.

Euler-Maclaurins sumformel

Fortidens matematikere har skabt mægtige teorier om sære funktioner som $\Gamma(z)$ og $\zeta(z)$ uden at vide ret meget om hvordan disse funktioner egentlig ser ud. Man kendte selvfølgelig udseendet af deres graf for reelle z, fordi man havde tilnærmelsesformler og udtryk for deres præcise værdier for særlige z-værdier. Men for komplekse z kunne kendskabet være beskedent. Hvad beregningen angår kunne man af og til betjene sig af funktionalligninger, så man kunne begrænse det store regnearbejde til et vist interval. 10-tals-logaritmen $\log_{10}x$ skal man som bekendt kun kende i intervallet $1 \leq x < 10$, da $\log_{10}(10^n \cdot x) = n + \log_{10}x$, og gammafunktionen $\Gamma(z)$ behøver man som vi har set kun at kende i intervallet $1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2$. I sådanne intervaller udarbejdede man tabeller som generation efter generation kunne gøre større.

Og hertil brugte man oftest en rækkeudvikling af funktionen. Hvis funktionen $f(z)$ er analytisk i punktet z_0 (side ...), gælder i en omegn af z_0 at

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

og her kan man af og til finde koefficienterne a_n. Ved succesivt at differentiere begge sider og i hver af de fremkomne rækker sætte $z = z_0$, ses at $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, så koefficienterne kendes altså hvis alle de højere afledede af $f(z)$ kendes i z_0. Dette er *Taylors formel*:

$$f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)h^n/n!$$

En sådan rækkeudvikling gælder kun for h numerisk mindre end et vist tal som kaldes rækkeudviklingens *konvergensradius.* At konvergensradius er større end 0 betyder netop at $f(z)$ er analytisk i punktet z_0. Hvis konvergensradius er ∞, dvs. hvis rækken er konvergent for alle h, kaldes $f(z)$ en *hel* funktion - en hel funktion er en funktion der er holomorf i hele den komplekse plan.

En rækkeudvikling kan have gode eller dårlige konvergensegenskaber. Funktionerne e^z, sin z og cos z er hele, og deres Taylorrækker ud fra punktet $z_0 = 0$ (side ...) konvergerer rimelig hurtigt. Funktionen log z er ikke defineret for z = 0, men er dog analytisk i resten af planen, men dens Taylorrække ud fra punktet z = 1 (side ...), som har konvergensradius 1, er ubrugelig til noget praktisk, selv om den er unægteligt er smuk. Det er ofte ikke Taylors formel man skal bruge. Desuden er det jo heller ikke sikkert at man kan finde brugbare udtryk for tallene $f^{(n)}(z_0)$: de første to koefficienter i en sådan rækkeudvikling for $\zeta(2+h)$ er henh.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \quad \text{og} \quad -\sum_{n=1}^{\infty} \log n/n^2,$$

og den første er $\pi^2/6$, men hvad er den anden?

Heldigvis kan man ved at teoretisere over Taylors formel få en sumformel frem, som i de tilfælde hvor den kan anvendes kan være uhyre effektiv. Men den skal bruges med forsigtighed, for den uendelige række som den giver anledning til er nemlig ofte divergent: tallene kan nærme sig mere og mere til det ønskede, men kun indtil et vist trin, herefter begynder det at gå den modsatte vej. Når formlen virker, kan dens parametre justeres således at dette trin kan rykkes ligeså langt ud det skal være, men denne justering er bestemt af den konkrete udregning. Så hvis man ikke gør sig teoretiske overvejelser, og det gør man ikke i vor tid med mindre det har betydning at estimere fejlen, så vil man hyppigt opleve at programmet går ned.

Formlen som vi skal udlede kaldes *Euler-Maclaurins sumformel.* Den har udgangspunkt i følgende betragtning: For en funktion f(x) som er differentiabel i punktet a, er differentialkvotienten f'(a) defineret som grænseværdien af tallene $(f(a+h) - f(a))/h$ for $h \to 0$. Dvs, hvis vi sætter $b = a+h$, er

$$h\, f'(a) = f(b) - f(a) + R,$$

hvor R er et restled som er af mindre størrelsesorden end h. Lad os nu antage at $b = a+Nh$, hvor N er et naturligt tal, så kan vi addere disse formler hvor a succesivt erstattes med $a+kh$ for $k = 0, 1, ..., N-1$, og b med $a+(k+1)h$, og så får vi (fordi tallene $f(a+kh)$ på højresiderne parvis ophæver hinanden) at

$$h \sum_{k=1}^{N-1} f'(a + kh) = f(b) - f(a) + R.$$

Men nu kan restleddet R selvsagt være af større betydning. Det viser sig at "den vigtigste" del af R er $-h(f'(b) - f'(a))/2$, og det gælder om succesivt og *rent formelt* at subtrahere led af denne form (indeholdende de højere afledede af f(x)) fra R, og så håbe på et det der er tilbage enten går imod 0 eller i det mindste kan estimeres. I den formel man herved får frem, kan man f.eks. sætte $h = 1$ og lade N og dermed b gå imod ∞, og hvis det gælder at f(x) og dens afledede af enhver orden går imod 0 for $x \to \infty$, vil man få en formel hvis begyndelse ser således ud:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(a + n) = -f(a) + f'(a)/2 + \ldots.$$

Og hvis man her f.eks. kan få venstre side til at ligne

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z,$$

så har man måske en brugbar formel for Riemanns zetafunktion.

Det viser sig, når man følger denne tankegang, at de led som succesivt skal subtraheres fra R - og hvoraf det første er $-h(f'(b) - f'(a))/2$ - har formen $(B_n/n!)\, h^n\, (f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a))$, hvor B_n-erne er rationale tal som er uafhængige af f(x). Dvs. den formel som vi ad denne vej er nået frem til, ser således ud:

$$h \sum_{k=1}^{N-1} f'(a + kh) = \sum_{n=0}^{M} (B_n/n!)\, h^n\, (f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) + R_M.$$

Dette er Euler-Maclaurins sumformel, og da vi intet véd på forhånd om restleddet R_M, kan den være helt værdiløs. Ofte er det tydeligt at den ikke virker, i så fald kan den måske bringes til at virke ved at ændre a eller b, således at det kun er en del af summen på venstre side man finder en formel for. Når man fremsætter en anvendelse af denne formel, må den altid være ledsaget af en estimation af R_M - f.eks. i forhold til det sidste led som er bortkastet, dvs. leddet for n = M+1.

Det altsammen afhænger af de rationale tal B_n, som er universelle konstanter og som kaldes *Bernoullitallene*. Bortset fra $B_1 = -½$ er de 0 for n ulige, og de første B_n-er for n lige er: $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ og $B_6 = 1/42$. Denne korte følge er numerisk aftagende, men herfra begynder tallene at vokse, og f.eks. er $B_{32} = 7709321041217/510$ (dette er det sidste Bernoullital der er med i mine programmer). Vi kan finde Bernoullitallene ved at anvende Euler-Maclaurins sumformel på en funktion hvor vi let kan udregne summen på venstre side. Vi kan f.eks. sætte $f(x) = e^{-x}$, a = 0 og h = y, så får vi, da $e^{-y} + e^{-2y} + \ldots = 1/(e^y - 1)$ at:

$$y/(e^y - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n/n!\, y^n.$$

Og her kan Taylors formel anvendes på venstre side: denne meromorfe funktion er analytisk i punktet y = 0 (bemærk at både tæller og nævner er 0 for y = 0), og da dens poler er punkterne $y = m2\pi i$, m hel ≠ 0, kan vi gå ud fra at dens rækkeudvikling ud fra y = 0, nemlig rækken på højre side, har konvergensradius 2π. Dette betyder at B_n simpelthen er den n-te afledede af funktionen $y/(e^y - 1)$ i punktet 0.

Det kan vises at det for ethvert n gælder at

$$1 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \ldots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0,$$

hvor $\binom{n}{k} = n!/((n-k)!k!)$ (binomialkoefficienterne). Og denne ligning betyder at Bernoullitallene kan udregnes rekursivt ud fra $B_0 = 1$. Dette gøres i programmet "Rekursion" (i mappen "Diverse") som kører indtil de første 16 Bernoullital (forskellige fra 0) er udregnet. Disse tal er derefter indlagt i unit-en "Bernoullital".

Og nu til hvordan man kan bruge Euler-Maclaurins sumformel til at finde en praktisk formel for Riemanns zetafunktion ζ(z). Tilsyneladende er det blot at vælge $f(x) = x^{1-z}/(1-z)$, fordi f'(x) i så fald er $1/x^z$, og så vælge a = 0, b = ∞ og h = 1, for så har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z = \sum_{k=1}^{\infty} f'(a + k),$$

og så giver Euler-Maclaurins sumformel os et udtryk for den højre side. Men det går ikke at vælge a = 0, for så aftager restleddet R slet ikke. Hvis vi derimod lader a være et tilstrækkeligt stort naturligt tal N, kan vi opnå at restleddet kan gøres lige så lille som det skal være. I så fald er det vi finder en formel for

$$\sum_{n=N}^{\infty} 1/n^z = \zeta(z) - \sum_{n=1}^{N-1} 1/n^z.$$

Hvis vi differentierer $f(x) = x^{1-z}/(1-z)$ succesivt mht. x og sætter x = N, giver Euler-Maclaurins sumformel os alt ialt:

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{N-1} 1/n^z + N^{1-z}/(z-1) + N^{-z}/2 +\sum_{n=1}^{M} (B_{2n}/(2n)!)\ z(z+1)...(z+2n-2)/N^{z+2n-1} +R,$$

og her er det klart at hvis blot N er tilstrækkelig stor, kan det sidste led i den sidste sum (leddet for n = M) gøres ligeså lille det skal være (for Re(z) ≥ 0). Det kan vises at restleddet R er numerisk mindre end |(z+2M+1)/(Re(z) +2M+1)| gange det første led der bortkastes (leddet for n = M+1). I programmet har jeg sat M = 16 og N = |Im(z)/3| + 200. Formlen gælder i et vist område tilvenstre for y-aksen, men for Re(z) < ½ findes ζ(z) ud fra ζ(1-z) ved hjælp af Riemanns funktionalligning som sammenknytter ζ(z) og ζ(1-z) og som vi kommer til senere (side ...). Programmet "MacZeta" (i mappen "Riemann") viser størrelsen af de forskellige led (undtagen restledet) i Euler-Maclaurins formel for ζ(z) (indtast z således at Re(z) ≥ 0).

Formlen for potensrækken ovenfor indeholdende B_n-erne kan ved anvendelse af formlen for $1/(e^y-1)$ på side ... skrives:

$$y \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} 1/(y+m2\pi i) - ½\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n/n!\ y^n$$

(den gælder for $|y| < 2\pi$). Og da venstre side er

$$1 - y/2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (y/(m2\pi))^2/(1+(y/(m2\pi))^2) = 1 - y/2 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (-(y/(m2\pi))^2)^n$$

$$= 1 - y/2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, (y/(2\pi))^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (1/m)^{2n},$$

ser vi at $\zeta(2n) = -(-1)^n(2\pi)^{2n}B_{2n}/(2(2n)!)$. Specielt er $\zeta(2) = \pi^2/6$. Da $\zeta(2n) \to 1$ for $n \to \infty$, har vi $B_{2n} \approx -(-1)^n 2(2n)!/(2\pi)^{2n}$ - denne formel for B_{2n} er faktisk god allerede fra n = 3. Der findes ingen formel for $\zeta(n)$ for n ulige.

Da gammafunktionen $\Gamma(z)$ optræder i Riemanns funktionalligning, må vi også have en effektiv formel for $\Gamma(z)$, og den kan vi også få ved hjælp af Euler-Maclaurins sumformel. Det er dog en formel for $\log\Gamma(z)$ vi vil finde. Ifølge Gauss' definition har vi:

$$\Gamma(z) = (1/z) \prod_{k=1}^{\infty} ((1+1/k)^z/(1+z/k)),$$

og derfor

$$\log\Gamma(z) = -\log z + \sum_{k=1}^{\infty} (z \log(1+1/k) - \log(1+z/k)).$$

Og hvis vi anvender Euler-Maclaurins sumformel på funktionerne xlogx-x og (z+x)log(z+x)-(z+x) (hvis afledede er henh. logx og log(z+x)), kan vi nå frem til denne formel gældende for Re(z) > 0 (*Stirlings formel*):

$$\log\Gamma(z) = (z-½)\log z - z + \log(2\pi)/2 + \sum_{n=1}^{M} B_{2n}/((2n)(2n-1)\, z^{2n-1}) + R,$$

hvor restleddet R kan vises at være numerisk mindre end $(2|z|/(|z|+\mathrm{Re}(z)))^M$ gange det første led der bortkastes. Jo større $|z|$ er, jo færre led behøves at medtages, men for ethvert z vil rækken divergere. I mit program har jeg valgt M = 16, og rækken benyttes for $|z| > 7$. Ud fra denne formel for $\log\Gamma(z)$ og ud fra $\Gamma(z) = \exp(\log\Gamma(z))$ og $\Gamma(z) = \Gamma(z+N)/(z(z+1)...(z+N-1))$ eller $\Gamma(z) = \Gamma(z-N)(z-1)...(z-N)$ (N naturligt tal) kan man udregne $\Gamma(z)$ med stor præcision, idet N vælges således at (f.eks.) $7 < \mathrm{Re}(z\pm N) < 8$. Programmerne der udregner $\zeta(z)$ og $\Gamma(z)$ er indlagt i unit-en "GammaZeta".

Fourier-inversion

Som bekendt kan enhver *svingning* - altså en funktion f(x) som er periodisk med en vis periode T: $f(x+T) = f(x)$ - *opløses i rene svingninger,* dvs. sinuskurver, idet den nemlig (ligesom savtakfunktionen på side ...) kan udtrykkes som en uendelig sum af rene svingninger der bliver hurtigere og hurtigere:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\lambda x) + b_n \sin(n\lambda x)),$$

hvor $\lambda = 2\pi/T$. At rækken virkelig fremstiller funktionen kan vi dog først være sikre på når denne er stykkevis differentiabel, i så fald er rækkens sum i et diskontinuitetspunkt lig middelværdien af funktionens grænseværdi fra venstre og højre. Tallene a_n og b_n - *Fourierkoefficienterne* til f(x) - findes ved

$$a_n = 2/T \int_0^T f(y) \cos(n\lambda y)\, dy \quad \text{og} \quad b_n = 2/T \int_0^T f(y) \sin(n\lambda y)\, dy$$

(disse tal eksisterer når f(x) blot er integrabel), og det gælder at

$$a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2/T \int_0^T |f(x)|^2\, dx$$

(*Parsevals sætning,* den gælder når f(x) blot er stykkevis kontinuert). Til en periodisk funktion svarer der altså en sådan følge af tal $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...,$ og omvendt (koefficienterne skal være således at rækken konvergerer og er differentiabel undtagen i højst endelig mange punkter indenfor en periode).

Vi kan formulere disse formler mere elegant ved at regne med komplekse tal: hvis de komplekse tal c_n (n hel) defineres ved

$$c_n = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(y/\lambda)\, e^{-nyi}\, dy = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(y)\, e^{-n\lambda yi}\, dy,$$

er

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{nx\lambda i}$$

og

$$1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x/\lambda)|^2\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(idet $c_n = (a_n - ib_n)/2$ og $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ - vi har benyttet at $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, og b_0 sættes lig 0).

Hvis f.eks. f(x) er savtakfunktionen S(x) (side ...), finder vi at $a_0 = 0$ og $b_n = 1/n$, og også at $\zeta(2) = 1 + 1/4 + ... + 1/n^2 + ... = \pi^2/6$ (= 1.64493..., jvf. Side ...).

Ved at forestille os at perioden $T \to \infty$ kan vi for en funktion f(x) på hele intervallet $-\infty < x < \infty$ (som er stykkevis differentiabel og således at $|f(x)|$ er integrabel) definere en funktion F(y) - den *Fouriertransformerede* af f(x) - ved

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xyi}\, dx,$$

så kommer vi tilbage til f(x) ved

$$f(x) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{xyi}\, dy.$$

Vi får nemlig en tilnærmelse til disse integraler ved i integralet og summen ovenfor at erstatte $n\lambda$ med y og λ med dy, idet $\lambda = 2\pi/T$ er "infinitesimal" for T "uendelig".

Hvis $|f(x)|^2$ er integrabel er $|F(y)|^2$ det også, og omvendt, og i så fald gælder:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\,dy.$$

Og hvis f(m) (m hel) er summabel er F(n) det også, og omvendt, og i så fald gælder *Poissons summationsformel:*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2\pi m) = 1/(2\pi)\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n),$$

som vi vil bruge til at udlede Riemanns funktionalligning for $\zeta(z)$.

Hvis f.eks. $f(x) = e^{-|x|}$ er (ifølge infinitesimalregningens fundamentalsætning):

$$F(y) = \int_0^{\infty} (e^{-x(1+yi)} + e^{-x(1-yi)})\,dx$$

$$= [(-e^{-x(1+yi)}/(1+yi)) + (-e^{-x(1-yi)}/(1-yi))]_{x=0}^{x=\infty} = 1/(1+yi) + 1/(1-yi) = 2/(1+y^2).$$

Derfor får vi af Poissons summationsformel (idet $\sum e^{-2\pi m}$ (sum fra m=1 til ∞) $= 1/(e^{2\pi}-1)$) at

$$1/2 + 1/5 + ... + 1/(n^2+1) + ... = (\pi(e^{2\pi}+1)/(e^{2\pi}-1) - 1)/2 \ (= 1.07667...)$$

Vi har iøvrigt helt elementært at $1/3 + 1/8 + ... + 1/(n^2-1) + ... = 3/4$.

I det følgende vil vi imidlertid mere få brug for en beslægtet transformation, *Fourier-Mellin-transformationen:* Hvis f(u) er en funktion defineret for de positive reelle tal, og den komplekse funktion F(z) defineres ved

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(u)/u^z\,du/u$$

er

$$f(u) = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)\, u^z\, dz$$

- det første integral konvergerer kun når Re(z) er større end et vist tal, og i det anden integral skal a vælges større end dette tal. Denne inversionsformel fås af den foregående (Fourier-transformationen) ved at erstatte f(x) med $f(e^t)e^{-xt}$, idet vi så har de reciproke formler

$$F(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^t)\, e^{-(x+iy)t}\, dt$$

og

$$f(e^t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, dy,$$

og disse bliver til Fourier-Mellin-transformationen når vi indfører substitutionen t = log u og sætter z = x+*i*y.

Gammafunktionen

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^z/e^t\, dt/t$$

er altså således at Γ(-z) er den Fourier-Mellin-transformerede af funktionen $f(t) = e^{-t}$, så derfor har vi

$$e^{-t} = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\, t^{-z}\, dz$$

for a > 0. Vi har allerede set denne formel for t = 1 (side ...), og i det sidste kapitel skal vi se hvorfor den har en særlig interesse.

Programmet "Fourier-inversion" (i mappen "Möbius- og Fourier-inversion") viser grafen for den Fourier-Mellin-transformerede af sin(x) (for linier parallelle med y-aksen) og grafen for sin(x) gendannet ved inversionsformlen. Tre grader af præcision kan vælges.

Mertens formodning

I næste kapitel vil vi udlede Riemanns formel for π_N, men som forberedelse hertil vil vi vende tilbage til en sag som vi ikke har fået gjort færdig, nemlig summen (side ...)

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(n).$$

Möbius funktion μ(n) kan antage værdierne 0, 1 og -1, idet μ(n) er 0 når n indeholder en primfaktor mere end én gang og 1 eller -1 når n har henh. et lige eller ulige antal primfaktorer. Og da der i denne sum, når N er stor, nok er nogenlunde lige mange af hvert fortegn, må den svinge omkring 0, men da vi kørte programmet "Mertens formodning", så vi at udsvingne er større end vi forventede, og dette må sige noget om primtallenes fordeling. Thi dér hvor primtallene ligger tæt, vil summen falde, og dér hvor de sammensatte tal ligger tæt, vil bidragene fra dem der netop har to forskellige primfaktorer få summen til at stige.

Hvis vi i definitionen af Riemanns zetafunktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z,$$

erstatter 1-tallerne i tællerne med talrækken μ(n), får vi en ny zetafunktion η(z) givet ved

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^z$$

for Re(z) > 1. Og ved hjælp af egenskaben hos μ(n) (side ...) som vi brugte til at vise Möbius' inversionsformel, får vi (for Re(z) > 1) at

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^z\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^z\Big) = 1.$$

Derfor kan funktionen $\eta(z)$ ligesom Riemanns zetafunktion udvides meromorft til hele den komplekse plan, og udvidelsen er sammenknyttet med Riemanns zetafunktion ved $\eta(z) = 1/\zeta(z)$.

Da ethvert naturligt tal n kan skrives entydigt på formen $n = km^2$, hvor k ikke indeholder primfaktorer i en højere potens, har vi også (for $\mathrm{Re}(z) > 1$) at

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(k)|/k^z\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^{2z}\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z\Big).$$

Dvs. for zetafunktionen defineret på samme måde ud fra $|\mu(n)|$ har vi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)|/n^z = \zeta(z)/\zeta(2z).$$

Sætter vi her $z = 1 + 1/N$ og multiplicerer vi på begge sider med $1/N = z - 1$ og lader $N \to \infty$, følger af at $\zeta(z)$ har pol i $z = 1$ med residuum 1 (side ...), hvilket betyder at

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+1/N}\Big)/N \to 1 \text{ for } N \to \infty,$$

og hvilket kan generaliseres til

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)|/n^{1+1/N}\Big)/\Big(\sum_{n=1}^{N} |\mu(n)|\Big) \to 1 \text{ for } N \to \infty,$$

at vi har:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)|\Big)/N \to 1/\zeta(2) \text{ for } N \to \infty,$$

og dette betyder at sandsynligheden for at et tal ikke indeholder en primfaktor mere end én gang er $1/\zeta(2) = 6/\pi^2 = 0.6079....$

Den uendelige sum der definerer $\eta(z)$ er umiddelbart kun konvergent for $\mathrm{Re}(z) > 1$, men hvis det gælder at alle nulpunkterne z for $\zeta(z)$ har $\mathrm{Re}(z) \le \alpha$, hvor $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, er den konvergent for $\mathrm{Re}(z) > \alpha$, og omvendt. Dette betyder at Riemanns hypotese er ensbetydende med den påstand, at summen der definerer $\eta(z)$ er konvergent for $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$. Bemærk at det at $1/\zeta(1) = 0$, betyder at den uendelige række $\sum \mu(n)/n$ er konvergent med summen 0.

Vi vil finde en formel for $\sum \mu(n)$ (sum fra n=1 til n=N-1), og hertil udvider vi denne funktion af det naturlige tal N til funktionen $\Sigma\mu(x)$ af det positive reelle tal x givet ved:

$$\Sigma\mu(x) = \sum_{n=1}^{n<x} \mu(n).$$

Og denne funktion er vi istand til at finde den Fourier-Mellin-transformerede af, så derfor har vi ved at benytte Fourier-Mellins inversionsformel, en formel for $\Sigma\mu(x)$ og dermed for $\sum \mu(n)$.

Vi skal altså udregne integralet (den Fourier-Mellin-transformerede af $\Sigma\mu(x)$)

$$\int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^{n<x} \mu(n)\Big)/x^z \, dx/x$$

(for $\mathrm{Re}(z) > 1$), og dette integral kan udregnes ved *partiel integration:* hvis funktionerne f(x) og g(x) er således at f(x)g(x) = 0 i integrationsintervallets endepunkter a og b, da gælder at

$$\int_a^b g'(x)\, f(x)\, dx = -\int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx$$

(formlen beror på at $d(f(x)g(x))/dx = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ og at vi i dette tilfælde har $\int (d(f(x)g(x))/dx)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) = 0$). Denne formel gælder også selv om der er punkter hvor f(x) (f.eks.) er diskontinuert, idet $f'(x)dx$ i så fald skal tolkes som dens spring: hvis f(x) i x_0 har springet k, er dette punkts bidrag til integralet $g(x_0)k$ (integralet $\int g(x)\, f'(x)\, dx$ skal derfor opfattes som Stieltjes-integralet $\int g(x)\, df(x)$, se side ...).

Hvis vi anvender formlen for partiel integration på $g(x) = -x^{-z}/z$ og $f(x) = \Sigma\mu(x)$ og med $a = 0$ og $b = \infty$, har vi, idet $g'(x) = 1/x^{z+1}$ og idet springet af $\Sigma\mu(x)$ i $x = n$ er $\mu(n)$, at det søgte integral har værdien

$$(1/z) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^z,$$

og dette er som vi har set funktionen $1/(z\zeta(z))$.

Vi får nu af Fourier-Mellins inversionsformel at

$$\sum_{n=1}^{N-1} \mu(n) = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} N^z/\zeta(z)\, dz/z$$

(hvor $a > 1$). Integralet her kan vi enten udregne direkte, eller vi kan benytte residueregning, idet integranden $N^z/(z\zeta(z))$ er meromorf og dens simple poler er $z = 0$ samt i alle nulpunkterne for $\zeta(z)$. For da man *formoder* at ethvert nulpunkt ρ for $\zeta(z)$ er simpelt (dvs. $\zeta'(\rho) \neq 0$), er enhver pol ρ for $1/\zeta(z)$ simpel og har residuum $1/\zeta'(\rho)$ (at nulpunktet z_0 for en funktion $f(z)$ er simpelt er ensbetydende med at $f'(z_0) \neq 0$, og i så fald har $1/f(z)$ simpel pol i z_0 med residuum $1/f'(z_0)$, og omvendt, se side ...), så derfor har vi:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \mu(n) = \sum N^\rho/(\rho\zeta'(\rho)) + 1/\zeta(0).$$

hvor summen går over *alle* nulpunkterne for $\zeta(z)$.

Vi vil prøvekøre disse to formler for $\sum \mu(n)$ (programmet "Mertens formodning"). I integralet sætter vi $a = 3/4$ (dvs. vi integrerer langs linien midt imellem linierne $x = ½$ og $x = 1$) og $\infty = 5000$, og i summen summerer vi ud til en radius af 200, nemlig over nulpunkterne $-2k$, for $k = 1$ til 100, og over de første 79 nulpunkter (over x-aksen) på linien $x = ½$. For $\zeta'(\rho)$ bruger vi tilnærmelsen $\zeta'(\rho) \approx \zeta(\rho+\varepsilon)/\varepsilon$, hvor ε er et lille tal (10^{-4} i programmet). Desuden benytter vi at $\zeta(0) = -½$. Formlerne giver nogenlunde det samme og det rigtige, men de er ikke ekstremt gode, det hænger sammen med at de er langsomt konvergerende, og dette hænger igen sammen med at funktionen $\sum \mu(n)$ springer hid og did.

Men læg nu mærke til, at i sumformlen kan vi sætte $\sqrt{N}$ udenfor en parentes, således at det der er inde i parentesen bliver begrænset, *hvis* Riemanns hypotese altså er sand, idet vi i så fald har $N^\rho = (\sqrt{N})N^{ti}$ når $\mathrm{Re}(\rho) > 0$ (da ρ har formen $½+it$). Og dette betyder at talfølgen

$$(1/\sqrt{N}) \sum_{n=1}^{N-1} \mu(n)$$

må formodes at være begrænset. *Mertens formodning* (1897) siger at tallene numerisk er begrænset af tallet 1, det er dog blevet bevist (1983) at dette ikke er rigtigt, dvs. tallet 1 skal erstattes med et større tal (hvilket der er det mindste der kan vælges er vist stadig ukendt). Mertens formodning (med det større tal) er stærkere end Riemanns hypotese, idet Riemanns hypotese følger af Mertens formodning. Og ved at bevise Mertens formodning havde Stieltjes i 1885 givet et bevis for Riemanns hypotese. Stieltjes var dog ikke tilfreds med dette bevis, da det byggede på aritmetiske egenskaber ved $\mu(n)$ og da han ønskede et simplere bevis som byggede på teorien for zetafunktionen $\zeta(z)$, men inden det var lykkedes for ham at finde et sådant, havde han glemt sit oprindelige bevis.

Riemanns hypotese er mildere end Mertens formodning på den måde, at af Mertens formodning følger umiddelbart at det for ethvert (lille) positivt tal ε gælder at

$$1/N^{½+\varepsilon} \sum_{n=1}^{N-1} \mu(n) \to 0 \quad \text{for } N \to \infty,$$

og af denne påstand følger Riemanns hypotese, idet den medfører at funktionen $1/\zeta(z)$ ikke har poler i halvplanen $\mathrm{Re}(z) > ½$. I 1912 beviste Littlewood at det omvendte også gælder, således at det at denne talfølge konvergerer imod 0 for ethvert ε, er ensbetydende med Riemanns hypotese.

Ud fra denne måde at formulere Riemanns hypotese på, kan man opstille et *statistisk* bevis for at Riemanns hypotese: man kan bevise at sandsynligheden for at Riemanns hypotese er sand er lig 1. Da der jo tilsyneladende ikke er nogen orden i $\mu(n)$'s værdier, kan vi antage, at for et n for hvilket $\mu(n) \neq 0$ (dvs. et n som er et produkt af *forskellige* primtal) kommer værdien af $\mu(n)$, dvs. et af de to tal 1 og -1, ganske som når man slår plat og krone. Og når man slår plat og krone et *stort* antal gange N, gælder det, at sandsynligheden for at udfaldet plat (*eller* udfaldet krone) afviger mindre end m (et givet tal) fra det forventede antal (nemlig N/2) er:

$$\int_{-(m/\sqrt{N})\sqrt{(2/\pi)}}^{(m/\sqrt{N})\sqrt{(2/\pi)}} \exp(-x^2\pi)\,dx$$

(funktionen $x \to \exp(-x^2/(2\sigma^2))/(\sigma\sqrt{(2\pi)})$ er tætheden af den såkaldte *normal-fordeling* med spredning σ: sandsynligheden for at et tilfældigt tal ud af en stor talmængde med middelværdi 0 og spredning σ falder i intervallet [a, b] er integralet af denne funktion fra a til b, hos os er $\sigma = 1/\sqrt{(2\pi)}$). Og dette betyder, at sandsynligheden for at *differencen* imellem antallet af plat og antallet af krone er numerisk mindre end 2m er dette integral. Og anvender vi dette argument på de "tilfældige" tal $\mu(n)$, idet vi sætter $m = N^{½+\varepsilon}$, får vi at:

$$1/N^{½+\varepsilon} \sum_{n=1}^{N-1} \mu(n) \to 0 \quad \text{for } N \to \infty,$$

for ethvert $\varepsilon > 0$, da $N^{\varepsilon} \to \infty$ for $N \to \infty$ og da integralet af $\exp(-x^2\pi)$ fra $-\infty$ til ∞ er 1.

Hermed har vi fået bekræftet af $\mu(n)$'s vekslen i fortegn virkelig er "tilfældig", og at den kurve man ville få ved i programmet "Mertens formodning" at erstatte $\mu(n)$ med en funktion der fik tildelt værdierne ±1 som når man slår plat og krone, ville variere ligeså vildt: kurven afspejler således blot tilfældighedens natur.

Mertens formodning er lige på kanten af Riemanns hypotese, og den er vist den måde at formulere noget der minder om Riemanns hypotese på, som lettest kan begribes af almindelige mennesker. Mertens formodning siger jo, at hvis vi betragter de tal mindre end N som er et produkt af primtal der alle er forskellige, så er forskellen imellem antallet af dem der består af henh. lige og ulige mange primtal numerisk begrænset af tallet $\sqrt{N}$ (gange en konstant).

En anden måde at formulere Riemanns hypotese på som handler mere direkte om primtallenes fordeling, er følgende: Primtalssætningen (som Gauss fremsatte) siger at Li(N) er en tilnærmelse til π_N (idet $\pi_N/\mathrm{Li}(N) \to 1$ for $N \to \infty$), men hvor god er denne tilnærmelse? Det er det Riemanns hypotese udtaler sig om. For det kan bevises (von Koch, 1901), at Riemanns hypotese er ensbetydende med den påstand at talfølgen

$$(\pi_N - \mathrm{Li}(N))/(\sqrt{N} \log N)$$

er begrænset.

Men det kan også bevises (Littlewood, 1914), at der er uendelig mange af tallene i denne talfølge som er større end $1/(2(\log N)^2)$ og uendelig mange som er mindre end $-1/(2(\log N)^2)$ (jvf. bemærkningen på side ...).

Man kan udlede et utal af formler der minder om formlen for $\sum \mu(n)$. I næste kapitel skal vi udlede den allervigtigste, men inden da vil jeg vise en anden formel af denne slags, nemlig en tilnærmelsesformel for summen

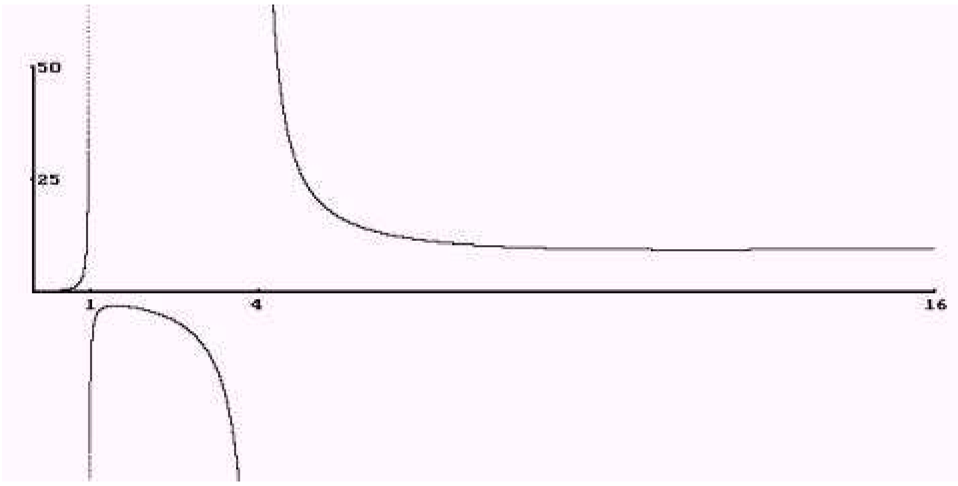
$$1/N \sum_{n=1}^{N} \sigma(n),$$

hvor $\sigma(n)$ er summen af primfaktorerne i n (regnet med multiplicitet, se side ...). Dette tal er gennemsnittet af de første N naturlig tals sum af primfaktorer, og da gennemsnittet af de første N naturlige tal er $(N+1)/2 \approx N/2$, må tallet selvsagt være meget mindre end N/2. En god tilnærmelsesformel lyder:

$$1/N \sum_{n=1}^{N} \sigma(n) \approx \int_0^N \zeta(2 \log t/\log N)\, t\, dt/\log t.$$

Højresiden er tilnærmelsesvist lig tallet $(\zeta(2)/2)\, N/\log N \approx (\zeta(2)/2)\, \pi_N = (\pi^2/12)\, \pi_N \approx 0.822\, \pi_N$. Så af formlen følger at forholdet imellem gennemsnittet af de første N naturlig tals sum af primfaktorer og antallet af primtal mindre end N konvergerer imod $\zeta(2)/2$ for $N \to \infty$. Da $\sigma(n)$ har logaritmeegenskaben $\sigma(mn) = \sigma(m)+\sigma(n)$, ser vi at summen af primfaktorerne i tallet N! omtrent er givet ved N gange integralet.

Bemærk at integranden $\zeta(2 \log t/\log N)\, t/\log t$ har 3 singulariteter i integrationsintervallet [0, N]: i t = 0 hvor log t ikke er defineret, i t = 1 hvor log t = 0 og i t = √N hvor zetafunktionen ikke er defineret. Integrandens graf ser således ud for N = 16:



For et sådant integral fra a til b hvor der imellem a og b er en singularitet c for integranden, er værdien defineret som grænseværdien for $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) af integralet fra a til c-ε plus integralet fra c+ε til b (jvf. Side .... At integranden ikke er defineret i c betyder normalt at det mest betydningsfylde sker her, så derfor bør man i udregningen udgå herfra, idet man vælger et lille tal d (f.eks. 10^{-4}) og går fra c+ε til b og fra c-ε til a igennem intervaller der gøres større og større (ved f.eks. succesivt at gange d med $1+10^4$). Hvis vi i det aktuelle integral vælger tal imellem de tre singulariteter, f.eks. 0.5 og 2, er integralet givet ved:

$$\int_0^N \ldots = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{0.5} \ldots + \int_{0.5}^{1-\varepsilon} \ldots + \int_{1+\varepsilon}^{2} \ldots + \int_{2}^{\sqrt{N}-\varepsilon} \ldots + \int_{\sqrt{N}+\varepsilon}^{N} \ldots\right).$$

De tre første integraler har øjensynlig hver især grænseværdi for $\varepsilon \to 0$, og de to første er af ganske ringe betydning i forhold til de øvrige, så dem vil vi se bort fra. Vi vil også se bort fra det tredie integral. De to sidste integraler synes hver især at divergere for $\varepsilon \to 0$, og dette kan vi få bekræftet ved erstatte funktionen med dens absolutværdi, så opdager vi at summen af de to sidste integraler kan gøres ligeså stor det skal være når ε gøres lille. I programmet "SumPrim" udregnes $1/N \sum \sigma(n)$ dels ved optælling og dels ved udregning af de to sidste integraler.

Hvad selve computerudregningen af integraler angår, har jeg i de fleste af programmerne anvendt *trapezformlen* - der er ingen grund til at være mere nøjagtig, når der er andre fejlkilder inde i billedet. Trapezformlen vil sige, at integrationsintervallet deles op i små bidder hvis bidrag til integralet er deres længde gange middelværdien af funktionsværdierne i deres endepunkter. Hvis intervallet fra a til b deles af punkterne $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N+1} = b$, lyder trapezformlen:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{2}\Big(f(a)d_0 + \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(d_{i-1}+d_i) + f(b)d_N\Big),$$

hvor $d_i = x_{i+1}-x_i$. I de fleste af programmerne forøges eller formindskes tallene d_i, og i så fald udgør de altid en kvotientrække, dvs. $d_{i+1} = kd_i$, hvor k er et fast tal lige omkring 1 (og så er $d_{i-1}+d_i = (1+k)d_{i-1}$). Det første eller sidste led udelades oftest, da a eller b enten er henh. $-\infty$ eller ∞ eller en singularitet for f(x).

Trapezformlen er anvendt i alle de komplekse integrationer. I nogle af de reelle integrationer, nemlig de ovennævnte integraler og funktionen Li(x) for reelle x, har jeg anvendt den mere nøjagtige Simpsons formel (Simpson, 1710-61). Denne bygger på at integrationsintervallet deles op i små bidder indenfor hvilke funktionen erstattes med parabler der har samme værdier som funktionen i biddernes endepunkter og i et punkt imellem disse. Følger alle disse punkter en kvotientrække med kvotient k, lyder Simpsons formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx k_0\Big(f(a)k(2-k)d_0 + \sum_{i=0}^{N} (k_1 f(x_i+d_i)+k_2 f(x_i+(k+1)d_i)d_i$$
$$+ (-k_2+2k-1)f(b)d_N\Big),$$

idet $x_{i+1}-x_i = (1+k)d_i$ og $d_{i+1} = k^2 d_i$, og $k_0 = (1+1/k)/6$, $k_1 = (1+k)^2$ og $k_2 = (2-k)k^3+2k-1$. Her er N og k således at $b = a+d_0(1+k)(k^{N+1}-1)/(k-1)$, men det sidste led ikke er medtaget i mine programmer. Programmet kan f.eks. se således ud (det sidste led er indrammet af en {}-parentes):

```
k := 1.00001;
k1 := sqr(1 + k);
k2 := (2 - k) * k * k * k + 2 * k – 1;
d := 0.00001;
t := a;
s := d * (2 - k) * k * f(t);
```

```
while t < b do
  begin
    d1 := (1 + k) * d;
    s := s + d * (k1 * f(t + d) + k2 * f(t + d1));
    t := t + d1;
    d := sqr(k) * d;
  end;
{s := s + d * (2 * k - 1 - k2) * f(t - d1) / sqr(k);}
s := s * (1 + 1 / k) / 6;
```

For k = 1 har vi den oprindelige Simpsons formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (d/3)(f(a) + \sum_{i=0}^{N-1} (4f(x_i+d)+2f(x_i+2d)) + 4f(b-d) + f(b)),$$

idet $x_{i+1}-x_i = 2d$ og $d = (b-a)/(2N+2)$. Disse tilnærmelsesformler er selvfølgelig helt eksakte når f(x) er et andengradspolynomium.