Planetbevægelse - og filosoferen over begrebet eksistens

Det var som bekendt *Kepler* (1571-1630) der opstillede de præcise love for planeternes bevægelse. Dette kunne han takket være *Tycho Brahes* meget nøjagtige optegnelser, især over planeten Mars. Keplers tre love lyder således:

> 1 Planeterne bevæger sig - ikke i cirkulære baner som Kopernikus havde hævdet - men i elliptiske baner med solen i det ene brændpunkt.
> 2 Det areal som linien fra solen til planeten trækker over lige lange tidsrum er konstant.
>
> 3 Hvis en planets middelafstand fra solen er r og dens omløbstid er t, er tallet r^3/t^2 ens for alle planeterne.

Et halvt århundrede senere beviste Newton disse love ud fra to meget generelle love som han selv havde opstillet. Dels mekanikkens grundsætning, *Newtons 2. lov:* hvis en partikel med massen m har accelerationen a, da er den påvirket af en kraft hvis størrelse er m·a - altså: kraft er lig masse gange acceleration. Og dels *massetiltrækningsloven:* to partikler med masserne m_1 og m_2 og afstanden r tiltrækker hinanden med en kraft som har størrelsen $\mu \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$, hvor μ er en universel konstant. I virkeligheden var det vist omvendt: det var Keplers planetlove som *ledte* Newton til massetiltrækningsloven. Men den er jo ganske køn og logisk, så hvis man virkelig kan bevise Keplers love ud fra den, så må den være sand.

Imidlertid er Keplers tre love strengt taget kun sande, når man antager at planeterne ikke indvirker på hinanden, og det gør de jo netop ifølge massetiltrækningsloven. Det var en sådan forstyrrelse i planeten Uranus bane, som i 1846 førte til opdagelsen af en planet længere ude, Neptun, og en forstyrrelse i Neptuns bane, som i 1930 førte til opdagelsen af en planet endnu længere ude, Pluto. Men disse uregelmæssigheder er ubetydelige. Lad os nu se på en situation hvor indvirkningen fra et tredie legeme er betragtelig. Lad os nemlig forestille os at solen var en *dobbeltstjerne:* to stjerner som er tæt ved hinanden og derfor kredser om hinanden. Hvordan ville planetlovene mon så se ud? Eksisterer de overhovedet? Programmet "Dobbeltsol" viser at en planets bane kan være aldeles absurd, ja selve planetens eksistens kan være truet.

Når to partikler bevæger sig uden indvirkning af andre kræfter end deres gensidige massetiltrækning, så gælder "planetlovene": partiklerne vil bevæge sig i elliptiske baner hvis ene brændpunkt er deres fælles tyngdepunkt (ellipserne vil altså have samme ekcentricitet og deres størrelser vil have samme forhold som partiklernes masser), og for denne bevægelse gælder Keplers lov 2 og 3. Men når der er tre partikler til stede, kan bevægelsen kun i særlige tilfælde beskrives matematisk. I gamle dage var der i det generelle tilfælde slet intet at gøre, idag kan computeren efterabe bevægelsen, men det den skaber er kun en tilnærmelse, og denne kommer til at afvige mere og mere fra den sande bevægelse: computeren finder hele tiden planetens nye position og hastighed ud fra dens acceleration som kendes eksakt, men den fundne nye position og hastighed er ikke eksakt, den beror på valget af et "infinitesimalt" tidsinterval dt. Denne konstruktionsmåde adskiller sig imidlertid væsentligt fra konstruktionsmåden i det foregående kapitel. Den lovmæssighed der er i de dér beskrevne kurver er af en meget mere tilgængelig natur: man kan bevise egenskaber og man kan måske endda konstruere kurven på anden vis. Planetbevægelsen derimod er langt mere uhåndgribelig, den er endda en form for determineret kaos som er mere subtil end bevægelsen i en Juliamængde eller en strange attractor. Og kan man overhovedet sige at den *sande* bevægelse eksisterer før den har fundet sted, når man kun i begrænset udstrækning kan forudsige den og fremsætte påstande om den? Ja, vil enhver moderne matematiker sige, den eksisterer fordi vi *i princippet* kan afgøre sandhedsværdien (sand/falsk) af ethvert udsagn af formen: "til tiden t er planeten i positionen P". Nemlig ved følgende procedure: for ethvert (stort) naturligt tal n har vi et "infinitesimalt" tidsinterval dt = 1/n som kan bruges til at tegne en kurve som fortsættes indtil tiden t og hvis endepunkt vi betegner P_n, og disse kurver vil for $n \to \infty$ konvergere imod den sande kurve hvis endepunkt er et punkt P*, så derfor er udsagnet ensbetydende med at P* = P, dvs. at den uendelige følge af punkter P_n vil konvergere imod punktet P. At et udsagn kan være af en sådan art, at det er total udelukket at vi kan få et svar på om det er sandt eller falsk, er uden betydning vil matematikeren sige: det der tæller er alene at tingene i princippet kan lade sig gøre.

Selv indenfor det mest eksakte af alle fag, matematikken, har der - lige indtil vor tid - været stridigheder om hvornår en genstand eksisterer og hvornår et argument er et bevis. Grækerne måtte betjene sig af det besværlige geometriske begreb "forhold" for det vi forstår ved de irrationale tal, fordi en cifferfremstilling ikke kunne være uendelig, og der gik lang tid førend et minustegn foran et tal kom til at høre med til tallet således at en ny slags tal var opstået, og så kom turen til de komplekse tal, og Newtons og Leibniz' infinitesimale størrelser, som var uendelig små men ikke 0, affødte megen morskab i det højere selskabsliv. Men menneskene tilpasser tingene eller tilpasser *sig* tingene. Men omkring det forrige århundreskifte, hvor en systematisk udforskning af matematikkens grundlag for alvor kom igang, blev der rettet angreb imod denne tilpassen. Kritikken kom især fra en gruppe af matematikere, kaldet *intuitionisterne,* hvis ledende skikkelse var den hollandske matematiker *Brouwer* og som talte nogle af tidens betydeligste matematikere. Intuitionisterne mente at matematikken lige siden infinitesimalregningens opfindelse var kørt længere og længere ud på et sidespor. Og de formede, med den græske dyrkelse af matematikken som forbillede, regler for hvordan den "mentale aktivitet" som matematik er, bør foregå. Først og fremmest benægtede de at noget uendeligt kan eksistere som en *genstand.* En matematisk genstand eksisterer først i det øjeblik at den, ud fra kendte og accepterede genstande, er dannet ved en *endelig konstruktiv* procedure. Og det samme krav er der selvfølgelig til et bevis: det må kun indeholde *endelige* operationer. Det uendelige findes kun i form af en (endelig) procedure som succesivt kan frembringe nye genstande. Et irrationalt tal bør defineres som en *fundamentalfølge* af rationale tal a_n (dvs. en følge der opfylder $|a_m - a_n| \rightarrow 0$ for $m, n \rightarrow \infty$) der er dannet igennem en endelig konstruktiv procedure (f.eks. Newtons iterationsprocedure). Derfor er "mængden" af de irrationale tal numerabel, da sådanne procedurer kan ordnes på rad og række efter et eller andet princip. *Kontinuet* ("det sammenhængende", svarende til en linie, de reelle tal, bevægelse, tid, osv.) bør dog tilskrives en større mægtighed end det numerable, men et kontinuum er et *ufærdigt voksende objekt,* noget som "frit kan udvikle sig", idet det består af såkaldte *valgfølger* som er styret af en *spredning:* dén konstruktive procedure som begrænser valgmulighederne. F.eks. kan spredningen sige at en følge af rationale tal skal være en fundamentalfølge, det er denne spredning der *er* de reelle tal.

Den sag som vakte mest forargelse hos intuitionisternes var det såkaldte *udvalgsaksiom,* som i al ubemærkethed havde sneget sig ind i matematikken, og som f.eks. er en forudsætning for en bekvem sætning som "$f(x) \rightarrow b$ for $x \rightarrow a \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow b$ for *enhver* talfølge $x_n \rightarrow a$" (kun implikationen imod højre er uangribelig). Udvalgsaksiomet siger at "hvis man har en uendelig mængde af (ikke-tomme) mængder, så kan man udvælge et element fra hver af dem". Mængden af disse udvalgte elementer påstås vel at mærke at eksistere som en matematisk genstand (der er ikke bare tale om en valgfølge), og man behøver *ikke* at præcisere den. Udvalgsaksiomet er ækvivalent med den påstand at "enhver mængde kan velordnes" - *velordnes* betyder at der eksisterer en ordensrelation på mængden således at enhver ikke-tom delmængde har et mindste element, og dette betyder at mængdens elementer kan opstilles på rad og række (hvordan?). Den sædvanlige ordensrelation på mængden af de naturlige tal er velordnet, men mængden af de *hele* tal må ordnes på anden vis for at blive velordnet, f.eks. 0, 1, -1, 2, -2, ...- hvordan kan mængden af de rationale tal velordnes? At de reelle tal kan velordnes lyder umiddelbart absurd, da de reelle tal jo udgør en ikke-numerabel mængde. Men uden dette aksiom ville en masse sætninger som var "bevist", blive ugyldige, f.eks. beror eksistensen af den biholomorfe afbildning nævnt i fraktalteorien på udvalgsaksiomet.

Men det intuitionistiske krav til et bevis: at alt skal være endeligt og konstruktivt, fik andre alvorlige følger. For det kom til at betyde, at det klassiske logiske princip *tertium non datur* ("der findes intet tredie"), dvs. ethvert udsagn er *enten* sandt *eller* falsk, måtte ofres. Nu kunne der være udsagn som hverken er sande eller falske. Thi hvis ingen af delene kan bevises på intuitionistisk vis, så er udsagnet hverken sandt eller falsk. Tag f.eks. følgende påstand: "der findes irrationale tal a og b således at tallet a^b er rationalt". Denne påstand kan *ikke* bevises på følgende måde: enten er tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationalt eller irrationalt, hvis det er rationalt kan vi vælge $a = \sqrt{2}$ og $b = \sqrt{2}$, og hvis det er irrationalt kan vi vælge $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ og $b = \sqrt{2}$ (i så fald bliver $a^b = 2$). For hvem siger at tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ enten er rationalt eller irrationalt? Et tal t er rationalt når vi har bevist at der findes hele tal p og q således at $t = p/q$, og det er irrationalt når vi har bevist at antagelsen at t er en brøk vil føre til en modstrid, men så længe vi ikke har gjort nogen af delene, véd vi ikke om udsagnet "t er rationalt eller irrationalt" er sandt. Ikke destomindre *er* det sandt at "der findes irrationale tal a og b således at a^b er rational", vi kan nemlig vælge $a = \sqrt{2}$ og $b = 2 \log_2 3$, i så fald bliver $a^b = 3$ (det er let at bevise at $\log_2 3$ er et irrationalt tal: hvis $\log_2 3 = p/q$ er $2^p = 3^q$, og dette strider imod aritmetikkens fundamentalsætning som siger at opspaltningen af et tal i primfaktorer er entydig).

Det er klart at alle sådanne dybsindigheder som gjorde livet sværere, måtte irritere den menige matematiker som havde travlt med sit arbejde. For ham gjaldt der efterhånden kun ét eneste eksistenskriterium og det lyder: tingen må ikke kunne give anledning til en logisk modsigelse. Alt det som man kan forestille sig og som man kan bevise ikke vil kunne føre til nogen modstrid, bør betragtes som eksisterende. Dette var *formalisternes* holdning, og heldigvis lykkedes det for disse at skabe et fundament for matematikken som *logisk set* er uangribeligt - næsten da, mere herom i afsnittet om primtallene. Hvis man spørger enhver moderne matematiker hvilket aksiomsystem der er grundlaget for hans beviser, siger han at det er *Zermelo-Fraenkels-aksiomsystem* (1908-24). Men han kender ikke noget særligt til dette, og han kan heller ikke forklare hvad et bevis egentlig er. Han er kender udvalgsaksiomet og dets problematik, og han betragter vel også et udsagn som "hvis mængden A eksisterer og hvis p(x) er et udsagn med en fri variabel, da eksisterer mængden $\{ a \mid (a \in A) \wedge p(a) \}$" som hørende blandt de mængdedannende aksiomer. Men hvis man spørger ham hvordan man *formalt* udtrykker det at noget eksisterer, bliver han usikker, for udsagnet "M eksisterer" er ikke et gyldigt formalt udsagn. Det foregående aksiom skal faktisk formuleres således: "hvis p (x) er et udsagn, er "$(\forall A)(\exists B)(\forall x\colon x \in B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge p(x))$" et aksiom". Hvad det bevismæssige angår, kender han selvfølgelig den fundamentale slutningsregel *modus ponens:* "hvis A er et teorem og hvis $A \Rightarrow B$ er et teorem, da er B et teorem". Og han véd måske også at en logisk regel som "$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$" bevises ud fra visse *logiske aksiomer* (eller at den kan antages at høre blandt disse). Det er denne logiske regel man bruger når man beviser et udsagn A *indirekte* (dvs. ved et mod-stridsargument, *reductio ad absurdium*): det antages at A er falskt (dvs. at $\neg A$ er et teorem) og det bevises at dette medfører at et udsagn B som vides at være et teorem er falskt, så må A nødvendigvis være et teorem. Thi hvis det er bevist at $\neg A \Rightarrow \neg B$ er et teorem, er $B \Rightarrow A$ et teorem (ifølge slutningsreglen og det logiske aksiom), og derfor er A et teorem (ifølge slutningsreglen, da B er et teorem). Men så udførligt hverken tænker eller udtrykker matematikeren sig, langt det meste foregår ubevidst. Og desuden arbejder matematikeren ikke indenfor en *formal teori* (som f.eks. *mængdelæren* eller *aritmetikken*), men indenfor en *fortolkning* af teorien, en såkaldt *model* for teorien, og som oftest er af naiv karakter (f.eks. *den naive mængdelære*). En model består af et vist *univers* af genstande, og enhver genstand i den formale teori (f.eks. en mængde) har et modstykke i modellen (genstandens tolkning), og ethvert formalt udsagn svarer til et udsagn om modellens genstande (udsagnets tolkning), og et sådant tolket udsagn er sandt eller falsk alt efter om dets påstand er en *kendsgerning* eller ikke (i ordets dagligdags forstand). Matematikeren tænker naivt, men udtrykker sig formalt, idet han kun taler om det han kan tale om: påstande og bevisførelse, men ikke om det han ser for sit indre blik.

En formal teori har oftest uendelig mange modeller, og det gælder at et udsagn er et teorem (dvs. kan bevises i den formale teori) hvis og kun hvis udsagnet er sandt (dvs. dets tolkning er sandt) i *enhver* af teoriens modeller (*Gödels fuldstændighedssætning,* 1930). At udsagnet ikke er et teorem er altså ensbetydende med at der findes en model hvori udsagnet er falskt. Så hvis der findes én model hvori udsagnet er sandt og en anden model hvori det er falskt, må udsagnet være uafhængigt af den formale teori: det kan hverken bevises eller modbevises (mere herom i afsnittet om primtallene).

Det at en formal teori kan have flere forskellige modeller, betyder at man kan konstruere modeller som har bestemte egenskaber. F.eks. kan man konstruere modeller for mængdelæren eller "teorien for de reelle tal" som har *infinitesimale* elementer (dx, dy, ...), og dette betyder at man helt legalt kan skrive $f'(x) \approx (f(x+dx) - f(x))/dx$. En sådan model kaldes en *ikke-standard* model, i modsætning til den *intenderede* model (standardmodellen, f.eks. den naive mængdelære). Men det gælder også, at *enhver* teori har modeller hvis univers kun består af *numerabelt mange* genstande (*Skolems paradoks,* 1922). Denne kendsgerning synes paradoksal fordi den umiddelbart strider imod et teorem som: "mængden af de reelle tal er ikke-numerabel" (Cantor, 1873), for dette udsagn er jo sandt i enhver model, og således også i en model hvis univers er numerabelt. Men en numerabel model for mængdelæren betyder ganske rigtigt at der findes en bijektiv korrespondance imellem de reelle tal (R) og de naturlige tal (N), men dette strider ikke imod at det formale udsagn "der findes ikke en bijektiv korrespondance imellem R og N" er et teorem (hvorfor?).

I *enhver* model, og således også i den sædvanlige naive mængdelære, vil det imidlertid altid gælde at kun numerabelt mange genstande kan påstås at *eksistere.* Thi en genstand eksisterer først *som genstand* når den udtømmende kan beskrives, dvs. når den svarer til en række (*streng*) af *tegn* i den formale teori (mere præcist: en *term* uden frie variable). F.eks. eksisterer det tal D som er Hausdorff-dimensionen af randen af den sædvanlige Mandelbrot-mængde, også selv om en eksplicit formel for D ikke eksisterer (f.eks. $D = e^{1/\pi}$), thi tallet kan beskrives præcist - og faktisk eksisterer en formel, nemlig D = 2. Derimod eksisterer en genstand fundet ved udvalgsaksiomet ikke som genstand: der ligger ikke mere i dens eksistens end at et udsagn af formen $(\exists x)$ (...) er et teorem, og at dette udsagn indgår i et bevis. Som sagt skal udvalgsaksiomet bruges til at bevise udsagnet "$f(x) \to b$ for $x \to a$, hvis det for enhver talfølge x_n således at $x_n \to a$, gælder at $f(x_n) \to b$". Beviset forløber indirekte: Vi antager at præmissen er opfyldt, men at f(x) ikke konvergerer imod b for $x \to a$. Da findes et tal $\delta > 0$ således at det for ethvert naturligt tal n gælder at mængden $M_n = \{ x \in R \,|\, |x - a| < 1/n \wedge |f(x) - b| > \delta \}$ er ikke-tom. Ifølge udvalgsaksiomet eksisterer derfor en talfølge x_n således at $x_n \in M_n$ for ethvert n. Og dette er en talfølge således at $x_n \to a$, men for hvilken det ikke gælder at $f(x_n)$ konvergerer imod b, hvilket strider imod præmissen at $f(x_n) \to b$ for enhver talfølge $x_n \to a$. Hvad vi har bevist er blot at udsagnene "$(\exists x_n)(\forall n)(x_n \in M_n)$" og "$(\forall x_n)((\forall n)(x_n \in M_n) \Rightarrow (x_n \to a) \wedge (f(x_n)$ konvergerer ikke imod b))" er teoremer, og heraf sluttet at udsagnet "$(\exists x_n)((x_n \to a) \wedge (f(x_n)$ konvergerer ikke imod b))" er et teorem.

Den intuitionistiske mening om hvordan matematisk tænkning bør foregå, blev stemt ned, men filosofferne ophørte ikke med at genere matematikerne. For selv set fra en intuitionistisk synsvinkel kan den uforudsigelige planetbevægelse vel godt siges at eksistere: det beskrevne udsagn der fastlægger banen er da en endelig konstruktiv procedure. Men eksisterer bevægelsen så? I løbet af det 20. århunderede rettede filosofferne mere og mere blikket imod *sproget* (Wittgenstein, Austin), idet det erkendtes at mange filosofiske problemer bør anskues som sproglige problemer. Og i 70-erne diskuterede man heftigt problemet *realisme* kontra *anti-realisme.* Realisme er den opfattelse at ethvert meningsfuldt sprogligt udsagn har en ganske bestemt sandhedsværdi sand/falsk, også selv om *vi* er totalt afskåret fra at komme til at kende den (for "Gud kender den"). Anti-realisme er enhver form for forkastelse af denne opfattelse. Ifølge den anti-realistiske position er der altså udsagn som er klart forståelige, men som det er meningsløst at tilskrive en sandhedsværdi: et udsagn har *først* en sandhedsværdi i det øjeblik der er fremlagt en *konstruktiv* procedure, som når man anvender den vil kunne føre til et svar på om udsagnet er sandt eller falsk. F.eks. har udsagnet "Jesus blev født lige omkring midnatstid" ingen sandhedsværdi ifølge denne opfattelse: vi har ingen skriftlige kilder som giver et uafviseligt svar og et argument som "hvis vi forestiller os at vi skruer tiden tilbage og ser hvordan alt gik for sig, så må det enten være sandt eller falsk at han blev født ved midnatstid", er ikke nogen konstruktiv procedure. Og hvorfor *skal* et sådant udsagn også tilskrives en sandhedsværdi? - den gør jo hverken fra eller til. Denne diskussion angår altså ikke *beviselighed* indenfor matematikken: hele verden var i mellemtiden bukket under for formalismen. Og den handler heller ikke om sproglig *mening:* den opfattelse at et udsagns mening er identisk med dets sandhedsbetingelser (Frege, den tidlige Wittgenstein) var også forældet, og afløst af den opfattelse at et udsagns mening er dets *brug* (den sene Wittgenstein, Austin). Talen er alene om *hvornår* et almindeligt sprogligt udsagn bør tilskrives en sandhedsværdi, idet det var blevet erkendt, at den opfattelse vi er tilbøjelige til at have: at *ethvert* veldefineret udsagn må være enten sandt eller falskt, er fejlagtig og skyld i mange absurditeter.

De anti-realistiske filosoffer (hvis førende skikkelse er Michael Dummett) har især hentet eksempler fra matematkken, idet de har forkastet *platonismen* (som realismen kaldes indenfor matematikken): den opfattelse at *enhver* matematisk påstand er sand eller falsk, også selv om et matematisk bevis eller modbevis ikke findes (mere om dette fænomén i afsnittet om primtallene). Og dog vil en anti-realist nok kunne gå med til at betragte visse matematiske påstande som sande selv om et bevis (måske) ikke findes. F.eks. Goldbachs formodning som vi skal høre om i den talteoretiske afdeling og som siger at "ethvert lige tal er summen af to primtal" (f.eks. 4 = 2+2, 10 = 3+7 = 5+5). Thi vi kan programmere en computer til for ethvert lige tal at undersøge påstanden og standse når den finder en modsigelse, og selvom computeren standser når den er nået til det største tal den kan håndtere, så kan vi forestille os computeren gjort større og større, og eftersom ethvert menneske vil være overbevist om at disse større og større computere aldrig vil finde en modsigelse, idet antallet af måder hvorpå et lige tal kan skrives som en sum af to primtal, som helhed vokser, så kan anti-realisten måske betragte denne argumenteren som et bevis for at Goldbachs formodning er sand. Og anti-realisten vil måske også kunne gå med til at betragte Riemanns hypotese (afsnittet om primtallene) som sand. Men hvad vil anti-realisten mene om en påstand om en planetbevægelse om en dobbeltstjerne? F.eks. at planeten engang vil gå til grunde eller at to planeter vil kollidere. For nu er den kurve der er på tale af en ganske anden natur end Riemanns kurve: Riemanns kurve er en traditionel matematisk kurve som kan tegnes punkt for punkt, og Riemanns hypotese er så nært knyttet til hans zetafunktion $\zeta(z)$ at hypotesen ligesom ligger "gemt" i denne formale genstand, på samme måde som ethvert spørgsmål om Mandelbrot ligger gemt i iterationsproceduren $z \rightarrow z^2 + \rho$. Men planetbevægelsen er ikke på samme intime måde knyttet til en formal genstand (Newtons love), og vi skal anstrenge os mere for at nærme os den end de fleste andre ting som fremgår af uendelige operationer. Anti-realisten sætter en grænse, men hvor sætter han den?

Jeg véd det ikke, og det er for sent at spørge ham, for han eksisterer ikke mere. Den tid hvor man igennem dybtgående tænkning kunne nå frem til uafviselige sandheder som ville ændre verden og gøre én udødelig, er forbi. Filosofiens tid er forbi. Og det var den allerede på den tid hvor anti-realisten fremførte sig kritik af den herskende tænkning. Han bragte en interessant problemstilling på bane som kunne diskuteres i artikler og på kongresser, men den ændrede end ikke hans egen tænkemåde, og det skulle den heller ikke: "mennesket er realist af tilbøjelighed", erkendte han. Og idag er den drivende kraft i verden alene blevet menneskets tilbøjelighed. Menneskeheden har eftertrykkeligt indhøstet den erfaring, at når tanker ligger fjernt fra vanen, formår de højst at fremkalde beundring hos fagfolk for deres skarpsindighed (Wittgenstein), og når de på håndgribelig vis synes at kunne tjene menneskene og mange derfor slutter op om dem, får de katastrofale følger (Marx). Derfor rettes fra nu af al den dybe tankevirksomhed klogeligt imod *fagene* - og imod forsøg på at forstå en udvikling som vi alle har erkendt at vi fremover kun kan være tilskuere til.

Havde jeg levet i filosofiens tidsalder, havde jeg næppe været enig med intuitionisterne. Jeg er en hårdnakket formalist, fordi jeg er opvokset på den tid hvor formalismen havde mest magt. Men hvad nu hvis intuitionismens kritik af den matematiske praksis var uafviselig? Ville dette have fået matematikerne til at ændre kurs? - acceptere at tingene måtte gøres mere besværligt? Jo, dengang ville de egentlige fagmatematikere muligvis have ændret kurs en smule, og denne ændring ville igennem ihærdige pædagoger have forplantet sig ned igennem uddannelsessystemet. For noget sådant skete faktisk da formalismen var blevet eneherskende. Formalismen gjorde arbejdet nemt for den menige matematiker og gav ham en stor frihed, og han behøvede ikke at vide noget særligt om det grundlag han arbejdede på, men den særlige terminologi og fremstillingsmåde som formalismen lægger op til, bredte sig fra "filosofferne" og nedad igennem hierakiet. Skulle en læser af denne bog ikke være helt på det rene med hvad et bestemt integral er, bringer jeg her definitionen således som den *sproglige* gymnasiast i formalismens guldalder (1960-erne) fik den serveret:

Sætning: Mængden $\mathcal{F}_f$ *af mål for en på et lukket interval* [a, b] *defineret reel funktion f er en filterbase.*

Definition: En funktion $f \in [a, b] \to \mathcal{R}$, *hvor* [a, b] *er et lukket reelt interval og* $a < b$, *kaldes integrabel på* [a, b], *når og kun når filterbasen* $\mathcal{F}_f$ *af mål for* [a, b] *er konvergent. Grænseværdien af* $\mathcal{F}_f$ *betegnes med*

$$\int_b^a f \, de$$

og kaldes det bestemte integral fra a *til* b *af f* de.

Og faktisk er denne måde at betegne et integral på mere korrekt end den traditionelle: $\int f(x)\, dx$, som jo egentlig er meningsløs, men som har den pædagogiske fordel at den leder tanken hen på hvordan en tilnærmelse til integralet kan dannes, nemlig som en sum af tal af formen $f(x'_i)\Delta x_i$, hvor x_i-erne er en voksende række af x-værdier fra a til b hvis indbyrdes afstande $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ er lille og hvor x'_i er beliggende imellem x_i og x_{i+1} (skrivemåden skyldes Leibniz). I *mål- og integrationsteorien* betegnes et integral således:

$$\int_O f \, d\mu$$

idet O er en mængde hvorpå et *mål* μ er defineret og f er en funktion på O (med f.eks. reelle eller komplekse værdier) som er *integrabel* mht. μ. Målet μ er en funktion med (oftest) reelle værdier og hvis definitionsmængde er visse delmængder af O: de *målelige,* og for en sådan A betegnes dens mål $\mu(A)$ (funktionen μ *kan* udvides så den er defineret for enhver delmængde af O, men den har kun pæne egenskaber på de målelige delmængder). Hvis O f.eks. er det reelle interval [a, b] og g(x) er en stykkevis kontinuert reel funktion på [a, b], så definerer g(x) et mål dg på [a, b]: er A et interval $[\alpha, \beta]$ er $dg(A) = g(\beta) - g(\alpha)$, og er A en disjunkt forening af intervaller er dg(A) summen af disse tal, og er A mere kompliceret men dog målelig mht. g(x), findes tallet dg(A) ved en grænseovergang. Og dette betyder at hvis f(x) er en funktion på [a, b], kan man tale om at f(x) er integrabel mht. g(x), dvs. mht. målet dg, i så fald er en tilnærmelse til dette integral givet ved en sum af tal af formen $f(x'_i)\Delta g_i$, hvor x_i-erne er en voksende række af x-værdier fra a til b hvis indbyrdes afstande er lille og hvor $\Delta g_i = dg([x_{i+1}, x_i]) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$ og hvor x'_i er beliggende imellem x_i og x_{i+1}. Et sådant integral kaldes et *Stieltjes integral* (Stieltjes, 1856-94) og det betegnes

$$\int_{b}^{a} f(x)\, dg(x).$$

Og lader man her g(x) være den identiske funktion e(x) = x, og fjerner man de overflødige "(x)", så har man de sproglige gymnasiasters notation. Stieltjes integralbegreb får vi brug for i primtalsteorien. Det sædvanlige integralbegreb kaldes også *Riemanns integral*, fordi Riemann skærpede den da kendte præcise definition af et integral som skyldtes *Cauchy.* Det er Cauchys definition vi i almindelighed bruger - for et komplekst integral er den vist i afsnittet om primtallene (Newtons og Leibniz' egne definitioner fra 1600-tallet er altfor tågede). Men også Riemanns definition har sine begrænsninger. Når man har at gøre med mængder og funktioner som er ekstremt eksotiske, bruger man et mål- og integralbegreb som er indført af *Lebesque* (1875-1941), og som må kaldes det ultimative mål- og integralbegreb, fordi det har elegante egenskaber. En mængde som er Riemann-målelig er også Lebesque-målelig, og værdien af målet er det samme, men der er mængder som er Lebesque-målelige, men ikke Riemann-målelige. Det tilsvarende gælder for integraler. F.eks. er en Julia-mængde (normalt) ikke Riemann-målelig, men den er altid Lebesque-målelig, og dens Lebesque-mål er 0.

Men lad os nu komme ned på jorden igen, ned til computeren, for vi skal udtænke et program for jordens bane hvis solen havde været en dobbeltstjerne. Vi antager at de to sole har samme masse M og at planetens masse m er forsvindende i forhold til M. Endvidere at solene bevæger sig i en (fælles) cirkel med radius s omkring et punkt som vi lader være origo for et koordinatsystem. Vi skal finde solenes og planetens position efter en infinitesimal tid dt (f.eks. 10^{-6}). Solenes position er givet ved vinklen u til den ene, og planetens position er givet ved dens koordinatsæt (x, y).

Vi skal først finde en sols vinkelhastighed u', for så véd vi at solens vinkel efter tidsintervallet dt er u + u'·dt. Hvis vinkelhastigheden er u', så har solens acceleration størrelsen $s \cdot u'^2$ og den er rettet imod origo. Dette ses nemmest når man lader solens bevægelse være beskrevet ved funktionen r(t) (af tiden t) ind i den komplekse plan givet ved $r(t) = se^{(u0 + u't)i}$ (idet u_0 er vinklen til tiden t = 0): så er hastigheden funktionen $r'(t) = u'ir(t)$ og accelerationen funktionen $r''(t) = -u'^2 r(t)$. Accelerationen har altså størrelsen $s \cdot u'^2$, så derfor følger af Newtons 2. lov at den kraft der virker på solen må have størrelsen $M \cdot s \cdot u'^2$, og da denne kraft kun kommer fra den anden sol, har den ifølge massetiltrækningsloven størrelsen $\mu \cdot M^2/(2s)^2$. Altså er $u' = \sqrt{(\mu \cdot M/(4s^3))}$ (Keplers 3. lov).

Hvis planetens hastighedsvektor er (vx, vy), vil planeten efter tidsintervallet dt (tilnærmelsesvist) være i positionen (x, y) + (vx, vy)·dt. Og hastighedsvektoren kan vi hele tiden finde ud fra planetens accelerationsvektor (ax, ay): efter tidsintervallet dt er hastighedsvektoren (tilnærmelsesvist) (vx, vy) + (ax, ay)·dt. Hvis planetens accelerationsvektor er (ax, ay), så må den kraft der virker på den være (ax, ay)·m, og da denne kraft kommer fra tiltrækningen fra de to sole, må den være summen af vektorerne

$$\mu \cdot M \cdot m \cdot (s \cdot \cos(u) - x,\ s \cdot \sin(u) - y)/(e^+)^3$$

og

$$\mu \cdot M \cdot m \cdot (-s \cdot \cos(u) - x,\ -s \cdot \sin(u) - y)/(e^-)^3,$$

hvor e^+ er længden af (s·cos(u) - x, s·sin(u) - y) (vektoren fra planeten til den ene sol) og e^- er længden af (-s·cos(u) - x, -s·sin(u) - y) (vektoren fra planeten til den anden sol). Altså er (ax, ay) denne sumvektor divideret med m.

Bemærk at det kun er tallet μ·M der kommer ind i billedet (bevægelsen er uafhængig af planetens masse m). I programmet er dette tal sat til 1/3, hvilket betyder at solene har en betragtelig masse (i forhold til deres afstand), og det er selvfølgelig for at få bevægelsen til at foregå hurtigt.

For at få det hele til at foregå i et passende tempo (afhængigt af computeren og af hvor lang tid man vil se bevægelsen), skal der indtastes en hastighedsfaktor (omkring 1) - den optræder i størrelsen af det infinitesimale tidsinterval dt.

I programmet "Dobbeltsol2" kan man indtaste solafstand og planetens begyndelsestilstand: afstand fra centrum, hastighed samt vinkel. De tre tilfælde i programmet "Dobbeltsol" har disse parameterværdier:

0.7	0.4	1.1	60
0.3	0.7	1.1	90
0.4	0	1.5	-100

En udmærket opgave er at indføje en planet mere, således at de to planeter har indvirkning på hinanden - de to planeter kan f.eks. have samme masse og begyndelseshastigheder, men starte diametralt modsatte steder.