Omvendingsformler for potensrækker

Asymptotiske og svingende asymptotiske potensrækker
Riemanns metode og cirkelmetoden

Af Niels-Henrik Aphel

Når man skal udlede en formel for en talteoretisk funktion - som for eksempel π_n, der er antallet af primtal mindre end n, eller μ_n, der er antallet af måder hvorpå n kan skrives som en sum af to primtal - så benytter man ofte den komplekse funktionsteori, idet man danner den til funktionen hørende potensrække. For funktionen c_n er potensrækken $\sum c_n x^n$, og hvis den har positiv konvergensradius, er c_n givet ved Cauchys integralformel

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0. Indføres variabeltranformationen $x = e^{-y}$, bliver $\sum c_i x^i$ en funktion G(y) af y, og man kan få en formel for G(y), og dermed en formel for c_n, ved at danne *zetafunktionen* Z(s) til potensrækken. Ad denne vej udledte Riemann en eksakt formel for π_n, og et halvt århundrede senere udledte Hardy & Littlewood en tilnærmelsesformel for μ_n.

Riemann beviste ikke sin formel for π_n, den blev første bevist 40 år senere, men den *kan* bevises. Hardy & Littlewoods tilnærmelsesformel for μ_n kan måske ikke bevises, thi et bevis for den ville være et bevis for Goldbachs formodning. I begge tilfælde er potensrækken et produkt af to potensrækker, men i første tilfælde er den ene af disse potensrækker ganske simpel, nemlig $\sum x^n$, derfor kan udregningerne for π_n føres helt igennem og formlen kan bevises at være korrekt - potensrækken for π_n er asymptotisk, mens potensrækken μ_n er svingende asymptotisk.

Hvis p_n er funktionen af n defineret ved $p_n = 1$ for n primtal og ellers 0, er π_n og μ_n givet som koefficienterne i produktpotensrækkerne:

$$\sum \pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum p_n x^n)$$

og

$$\sum \mu_n x^n = (\sum p_n x^n)^2.$$

For to formale potensrækker $\sum f_i x^i$ og $\sum g_j x^j$ er koefficienten $(f, g)_n$ i deres produkt lig $\sum f_i g_{n-i}$ $(i < n)$. Hvis $i_n \equiv 1$, har vi altså $\pi_n = (i, p)_n$ og $\mu_n = (p, p)_n$.

Lad σ_n være summen af n's primfaktorer med multiplicitet - σ_n opfylder altså logaritme-betingelsen $\sigma_{mn} = \sigma_m + \sigma_n$. Funktionen $(i, \sigma)_n$ betegnes b_n, og den er beslægtet med π_n, idet den er en "sumrække", funktionen $(p, \sigma)_n$ betegnes a_n, og den er beslægtet med μ_n.

Vi har altså $a_n = \sum\sigma_{n-p}$ (p primtal < n) og $b_n = \sum\sigma_i$ $(i < n)$, eller:

$$\sum a_n x^n = (\sum p_n x^n)(\sum \sigma_n x^n)$$

og

$$\sum b_n x^n = (\sum x^n)(\sum \sigma_n x^n).$$

Goldbachs formodning siger at $\mu_n > 0$ for n lige, denne "kendsgerning" er beslægtet med denne ulighed:

$$b_n/n < a_n/\pi_n \text{ for n lige}$$

- og n tilstrækkelig stor. Uligheden kan formuleres således:

middelværdien af tallene σ_i $(i < n)$ < middelværdien af tallene σ_{n-p} (p primtal < n)

for n lige (for n ulige skal ulighedstegnet vendes, men så gælder uligheden dog ikke hvis n har mange helt små primfaktorer).

Foruden formlerne for disse funktioner vil vi udlede et utal af andre af talteoriens formler.

1 De talteoretiske funktioner $\mu(n)$ og $\phi(n)$

Möbius-funktionen $\mu(n)$ defineres ved $\mu(n) = (-1)^r$ hvis n er produktet af netop r *forskellig*e primtal og ellers 0 (altså hvis en primfaktor optræder i en højere potens). For $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum \mu(d) \text{ (d divisor i n)} = 1 \text{ for } n = 1 \text{ og ellers } 0.$$

Af denne egenskab følger at hvis

$$F(x) = \sum 1/m\, f(mx) \quad (m > 0)$$

da er

$$f(x) = \sum \mu(n)/n\, F(nx) \quad (n > 0)$$

- forudsat konvergens naturligvis - det vises ved indsætning. Hvis $f(x) = \sin x$ er $F(x)$ savtakfunktionen med perioden π og med $F(0) = \pi/2$ og $F(\pi) = 0$, og vi har at $\sin x = \sum \mu(n)/n\, F(nx)$, altså savtakken plus formindskede udgaver og hvor nogle skal omvendes.

Euler-funktionen $\phi(n)$ defineres ved $\phi(n) = \#((Z/nZ)^*)$, altså antallet af elementer i gruppen af invertible elementer i restklasseringen Z/nZ, eller sagt med andre ord: antallet af $h = 1, 2, ..., n - 1$ der er primiske med n. For n og m primiske er $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$, for p primtal er $\phi(p^{r+1}) = p^r(p - 1)$, og $\phi(2p) = \phi(p) = p - 1$.

Hvis ε er en primitiv n-te rod af enheden ($\varepsilon^n = 1$ men $\varepsilon^m \neq 1$ for $m < n$) er

$$\sum_{j\, \varepsilon\, (Z/nZ)^*} \varepsilon^j = \mu(n).$$

Hvis vi sætter $e(x) = e^{x2\pi i}$, kan en n-te rod af enheden skrives $\varepsilon = e(j/n)$, at den er primitiv betyder at $j\ \varepsilon\ (Z/nZ)^*$.

2 Euler-Maclaurins sumformel

Det n-te *Bernoulli-polynomium* $B_n(x)$ er det entydigt bestemte polynomium der opfylder

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\, dt = x^n.$$

De første er $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - 1/2$, $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$, $B_3(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$. $B_n(x)$ er af n-te grad og der gælder

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

$$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x)$$

$$B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x) + B_n(x+1/2)).$$

Det n-te *Bernoulli-tal* B_n defineres ved $B_n(0)$. Disse tal er givet rekursivt ved $B_0 = 1$ og

$$1 + \binom{k}{1}B_1 + \binom{k}{2}B_2 + ... + \binom{k}{k-1}B_{k-1} = 0.$$

De første er $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, ... De ulige bortset fra B_1 er 0 og de lige veksler fortegn og *vokser* numerisk efter B_6: for n stor er $B_{2n} \approx (-1)^{n+1}2(2n)!/(2\pi)^{2n}$ (se …).

Lad f(x) være en funktion der er tilpas ofte kontinuert-differentiabel i intervallet [a, b] og lad $N \varepsilon IN$ og sæt $h = (b - a)/N$. Da får vi ved at anvende partiel integration på integralet at

$$h \sum_{i=0}^{N-1} f'(a + ih) = f(b) - f(a) + (-1/2)h(f'(b) - f'(a)) + \int_a^b B_1((t - a)/h) - [(t - a)/h])f''(t)\,dt.$$

Og hvis vi fortsætter med at anvende partiel integration og udnytte egenskaberne for $B_n(x)$ (bland andet at $B_n = 0$ for n ulige > 1) får vi

$$h \sum_{i=0}^{N-1} f'(a + ih) = \sum_{n=0}^{M} (B_n/n!)h^n(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) + R_M$$

hvor restleddet er givet ved

$$R_M = (-1)^{M+1}/M! \int_a^b B_M((t - a)/h) - [(t - a)/h])f^{(M+1)}(t)\,dt.$$

Leddene i rækken behøver ikke nødvendigvis at aftage! De er normalt aftagende for små n, men kan være voksende for store n da B_n vokser. Sålænge leddene er aftagende er R_M numerisk af mindre størrelsesorden end det første led der bortkastes. Da $R_{2n} = R_{2n+1}$ kan vi forudsætte M ulige. Da er $B_M((t - a)/h) - [(t - a)/h])$ oscillerende, idet $B_{2n+1}(1 - x) = -B_{2n+1}(x)$ og $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = 0$, så hvis $f^{(M+1)}(t)$ er monoton kan man let give en vurdering af R_M. Vil man have større nøjagtighed må man ofte ændre et af endepunkterne for summeringen (a eller b) således at $f^{(n)}(a)$ eller $f^{(n)}(b)$ bliver numerisk mindre (se de to næste §§).

Hvis rækken $\sum f^{(n)}(a)(B_n/n!)x^n$ har positiv konvergensradius r er $\sum f'(a + ih)$ $(i \geq 0)$ konvergent for $|h| < r$ og

$$-h \sum_{i=0}^{\infty} f'(a + ih) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)B_n h^n/n!$$

Det er mest nærliggende anvende denne formel på $f(x) = e^{-x}$ og a = 0 (vi sætter h = y):

$$y/(e^y - 1) = \sum B_n/n!\; y^n$$

da $e^{-y} + e^{-2y} + ... = 1/(e^y - 1)$. Den kan tjene til definition af B_n. Vi vil sætte $\alpha_n = B_{n+1}/(n+1)!$, da har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/e^{ny} = 1/y + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, y^i$$

som kan generaliseres til

$$1/m! \sum_{n=1}^{\infty} (ny)^m/e^{ny} = 1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i.$$

Da $1/(e^y - 1) = 1/2 \coth(y/2) - 1/2 = \sum 1/(y + k2\pi i) – 1/2$ (sum over $k \varepsilon Z$) har vi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i) = 1/y + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, y^i$$

som kan generaliseres til

$$y^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i)^{m+1} = 1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i.$$

3 Gammafunktionen

Gammafunktionen $\Gamma(s)$ kan for $\mathrm{Re}(s) > 0$ defineres ved

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^s/e^t\, dt/t$$

- altså den Fourier-Mellin-transformerede til e^{-t}. Den kan udvides analytisk til hele planen og udvidelsen er meromorf. Polerne for $\Gamma(s)$ er netop punkterne $-m$ ($m \in \mathbb{N}_0$), de er alle simple og residuet for polen $-m$ er $(-1)^m/m!$. $\Gamma(s)$ har ingen nulpunkter. For den hele funktion $1/\Gamma(s)$ gælder for *alle* s Hankels integralformel

$$1/\Gamma(s) = 1/(2\pi i) \int_L e^y/y^s\, dy$$

hvor L er en kurve der starter ved $-\infty$, løber under den negative akse, går omkring 0 og fortsætter mod $-\infty$ over den negative akse - y^s er naturligvis defineret som $\exp(s \log y)$. Vi har omvendingsformlerne

$$\Gamma(s)/n^s = \int_0^{\infty} y^s e^{-ny}\, dy/y$$

og

$$e^{-ny} = 1/(2\pi i) \int_L y^{-s}\Gamma(s)/n^s\, ds.$$

For $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ gælder produktformlen

$$\Gamma(s) = 1/s \prod_{k=1}^{\infty} \left((1 + 1/k)^s/(1 + s/k)\right).$$

$\Gamma(1) = 1$ og $\Gamma(s)$ tilfredsstiller funktionalligningen $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ - heraf følger at for $n \in \mathbb{N}_0$ er $\Gamma(n+1) = n!$. Endvidere gælder

$$\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \pi/\sin(\pi s) \text{ og } \Gamma(1/2 + s)\Gamma(1/2 - s) = \pi/\cos(\pi s)$$

og

$$\Gamma(2s) = 2^{2s-1}/\sqrt{\pi}\, \Gamma(s)\Gamma(1/2 + s).$$

Af produktformlen får vi en rækkeudvikling af $\log \Gamma(s)$ og hvis vi i denne anvender Euler-Maclaurins sumformel på funktionerne $x \log x - x$ og $(s + x)\log(s + x) - (s + x)$ får vi (Stirlings formel)

$$\log \Gamma(s) = (s - 1/2)\log(s - 1) - (s - 1) + \log(2\pi)/2 + \sum_{n=1}^{M} B_{2n}/((2n)(2n - 1)(s - 1)^{2n-1}) + R_{2M}$$

hvor

$$R_{2M} = -\int_0^\infty B_{2M+1}(t - [t])/((2M + 1)(s - 1 + t)^{2M+1})\, dt.$$

Formlen giver bedre resultat jo større |s| er, men rækken er altid divergent, så den kan kun bruges sålænge leddene er aftagende (hvis $s - 1 = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ er fejlen R_{2M} numerisk mindre end $1/\cos(\theta/2)^{2M}$ gange det første led der bortkastes). Når |s| er lille må vi benytte at $\Gamma(s) = \Gamma(s + N)/(s(s + 1)...(s + N - 1))$ - for ethvert $\varepsilon > 0$ kan man altid finde et N således at fejlen ved at bruge formlen er mindre end ε.

4 Riemanns zetafunktion.

Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ kan for $Re(s) > 1$ defineres ved

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$$

eller ved produktet

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primtal}} (1 - 1/p^s)^{-1}.$$

Summen og produktet er absolut konvergent og den derved definerede analytiske funktion har meromorf udvidelse, idet der gælder

$$\zeta(s) = -\Gamma(1 - s)/(2\pi i) \int_{-L} (-y)^s/(e^y - 1)\, dy$$

hvor er -L er den modsatte kurve til den ovennævnte kurve L, og her er integralet som funktion af s holomorf i hele planen. Af formlen for $\Gamma(s)/n^s$ i foregående § følger, at for $Re(s) > 1$ er

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty y^s/(e^y - 1)\, dy/y.$$

For $m \in IN$ kan $\zeta(2m)$ findes således: Ifølge § 2 er

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n2\pi i)^{-1} = y^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{m+1}/(m + 1)!\, y^m$$

men vi har også

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n2\pi i)^{-1} &= 2/y \sum_{n=1}^{\infty} (y/n2\pi)^2/(1 + (y/n2\pi)^2) \\ &= 2/y \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (y/n2\pi)^{2m} \\ &= 2/y \sum_{m=1}^{\infty} (y/2\pi)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2m}\end{aligned}$$

altså er $\zeta(2m) = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}B_{2m}/(2(2m)!)$ - specielt er $\zeta(2) = \pi^2/6$. Der findes ingen formel for s ulige.

For s således at $0 < Re(s)$ og $s \neq 1$ er

$$\zeta(s) = \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{M} 1/n^s - M^{1-s}/(1-s)\right)$$

da $\sum 1/n^s - \int dy/y^s$ (sum og integration fra 1 til M) konvergerer for $M \to \infty$, og derfor må være $\zeta(s) - 1/(s-1)$, men $M^{1-s}/(1-s) = \int dy/y^s$ (integration fra 0 til M) = $1/(s-1) + \int dy/y^s$ (integration fra 1 til M). Af dette følger at

$$\lim_{s\to 1} (\zeta(s) - 1/(s-1)) = \lambda$$

hvor $\lambda = 0{,}5772157...$ - *Eulers konstant*. $\zeta(s)$ har altså simpel pol i $s = 1$ med residuum 1, og dette er den eneste singularitet for $\mathrm{Re}(s) \geq 1$. For $\mathrm{Re}(s) > 1$ har vi også (ved en elementær udregning)

$$\zeta(s) = 1/(s-1) + 1 + s\int_1^\infty y^{-s}\,(y - [y])\, dy/y$$

som igen viser at $\zeta(s)$ kan udvides til $\mathrm{Re}(s) > 0$ og har simpel pol i $s = 1$ med residuum 1. Sættes heri $s = 1/2 + ti$, ses at $\zeta(1/2 + ti)/(1/2 + ti)$ er den Fourier-transformerede til $([e^x] - e^x)/e^{x/2}$.

For $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ kan $\zeta(s)$ findes ud fra $\zeta(1-s)$, da $\zeta(s)$ tilfredsstiller en funktionalligning der sammenknytter $\zeta(s)$ og $\zeta(1-s)$. Sættes

$$\xi_0(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

er

$$\xi_0(s) = \xi_0(1-s)$$

eller

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cos(s\pi/2)\,\zeta(s)$$

for alle s.

Funktionalligningen følger af Poissons sætning, der siger at hvis funktionen f(x) og den Fourier-tranformerede f^(x) aftager tilstrækkelig hurtigt for $|x| \to \infty$, da er

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\hat{}(n).$$

Anvendes denne sætning på $f(x) = 1/(y + ix)^s + 1/(y - ix)^s$ ($\mathrm{Re}(s) > 1$ og $\mathrm{Re}(y) > 0$) for hvilken $f\hat{}(x) = (2\pi)^s/\Gamma(s)\,|x|^{s-1}/e^{2\pi y|x|}$ fås

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + ki)^s = (2\pi)^s/\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}/e^{2\pi yn}$$

for $\mathrm{Re}(s) > 1$ og $\mathrm{Re}(y) > 0$. Da højre side er en holomorf funktion af s i hele planen kan venstre side udvides til en holomorf funktion af s i hele planen, og denne $-1/y^s$ har grænseværdi $2\cos(s\pi/2)\zeta(s)$ for $y \to 0$ for $\mathrm{Re}(s) > 1$ og derfor for alle s. For $\mathrm{Re}(s) < 0$ har venstre side altså grænseværdi $2\cos(s\pi/2)\zeta(s)$ for $y \to 0$, og for $\mathrm{Re}(s) < 0$ har højre side grænseværdi $(2\pi)^s/\Gamma(s)\,\zeta(1-s)$ for $y \to 0$, altså er $2\cos(s\pi/2)\,\zeta(s) = (2\pi)^s/\Gamma(s)\,\zeta(1-s)$ for $\mathrm{Re}(s) < 0$ og dermed for alle s.

Funktionalligningen kan omskrives til

$$\pi^{-si/2}\,\Gamma(1/4 + si/2)\zeta(1/2 + si) = \pi^{si/2}\,\Gamma(1/4 - si/2)\zeta(1/2 - si)$$

hvoraf ses at funktionen $T(t) = \pi^{-ti/2}\Gamma(1/4 + ti/2)\zeta(1/2 + ti)$ er reel når t er reel. Af funktionalligningen følger at for $s \leq 0$ har $\zeta(s)$ nulpunkter i $-2m$ ($m \in$ IN) og ikke andre singulariteter end disse. Af funktionalligningen følger endvidere at $\zeta(0) = -1/2$ og $\zeta(-(2m - 1)) = -B_{2m}/(2m)$ for $m \in$ IN. I strimlen $0 < Re(s) < 1$ må gælde at hvis ρ er en singularitet da er ρ^c, $1 - \rho$ og $1 - \rho^c$ også singulariteter. Det viser sig at der i strimlen $0 < Re(s) < 1$ er uendelig mange nulpunkter (men ingen poler). *Riemanns hypotese* siger at for alle nulpunkterne i strimlen er $Re(\rho) = 1/2$ - de består altså af indbyrdes konjugerede par: $\rho = 1/2 \pm ti$. De første 5 nulpunkter har t = 14,135, 21,022, 25,011, 30,425, 32,935.

Funktionen $\xi(s) = s(s - 1)\xi_0(s)$ er hel og dens nulpunkter er nulpunkterne for $\zeta(s)$ i strimlen $0 < Re(s) < 1$. $\xi(s)$ er faktisk "et polynomium af uendelig orden" idet der gælder

$$\xi(s) = \xi(0) \prod (1 - s/\rho) \quad \text{(produkt over nulpunkterne } \rho \text{ for } \xi(s)).$$

Hvad angår rækkefølgen af faktorerne er det nok blot at tage disse parvis for rødderne ρ og $1 - \rho$, da produktet så er absolut konvergent. Men dette forudsætter dog at tætheden af rødderne, altså nulpunkterne af $\zeta(s)$ i strimlen $0 < Re(s) < 1$, ikke er for stor. Riemann fik tingene til at passe ved at skitsere et bevis for at tætheden af nulpunkterne ved $Im(\rho) = T$ er tilnærmelsesvist $\log(T/(2\pi))/(2\pi)$. Eller mere præcist: antallet af nulpunkter i området $0 < Re(s) < 1$, $0 < Im(s) < T$, er tilnærmelsesvist $\log(T/(2\pi))/(2\pi) - T/(2\pi)$, idet den relative afvigelse går mod 0 af størrelsesorden $1/T$ for $T \to \infty$. Riemann skriver blot at integralet af $1/(2\pi i)\ \xi'(s)/\xi(s)$ rundt langs dette område (og det er jo antallet af nulpunkter af $\xi(s)$ i området) er $\log(T/(2\pi))/(2\pi) - T/(2\pi)$ på nær afvigelsen. Dette er korrekt, men det blev først rigtigt bevist i 1905 af von Mangoldt.

Vi har derfor

$$\log\zeta(s) = -\log(s - 1) + \sum_{\rho} \log(1 - s/\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} (\log(s + 2k) - s(1 + 1/k)/2)) + s(\log \pi)/2 - \log 2$$

da $\log \xi(0) = -\log 2$.

Hvis vi anvender Euler-Maclaurins sumformel på $f(x) = x^{1-s}/(1 - s)$ og sætter $h = 1$, $a = N$ (stort) og $b = \infty$ får vi

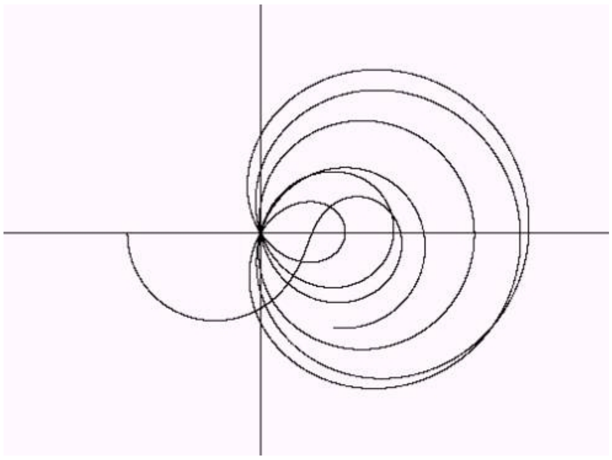
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} 1/n^s + N^{1-s}/(s - 1) + N^{-s}/2 + \sum_{n=1}^{M} (B_{2n}/(2n)!)s(s + 1)...(s + 2n - 2)/N^{s+2n-1} + R_{2M}$$

hvor

$$R_{2M} = -s(s + 1)...(s + 2M)/(2M + 1)! \int_N^{\infty} B_{2M+1}(t - [t])/t^{s+2M+1}\, dt.$$

Hvis $\rho = Re(s)$ vil fejlen R_{2M} være numerisk mindre end $|(s + 2M - 1)/(\rho + 2M - 1)|$ gange det første led der bortkastes. Formlen gælder for $Re(s + 2M + 1) > 1$ - og viser (igen) at $\sum 1/n^s$ kan udvides analytisk. Rækken er altid divergent, men jo større N vælges i forhold til $|s|$ jo større kan M vælges (førend leddene begynder at vokse).

Kurven $\zeta(1/2 + ti)$ ser således ud:



Når man skal studere opførslen af nulpunkterne for $\zeta(1/2 + ti)$ (for eksempel fortegnsvariationer) benytter man oftest den reelle funktion $T(t)/|\Gamma(1/4 + ti/2)|$. Det følger af formlen for gammafunktionen at denne funktion er $\zeta(1/2 + ti)e^{\theta(t)i}$, hvor

$$\theta(t) \approx (t/2)\log(t/(2\pi)) - t/2 - \pi/8 + 1/(48t) + 7/(5760t^3)$$

- fejlen er mindre end $2/t^5$. Af formlen for e^{-ny} på side 4, fås at $\sum e^{-n2y} = 1/(2\pi i)\int y^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\,ds$, og ved integration langs linien $Re(s) = 1/4$, ses at $T(2t)$ er den cosinus-transformerede af funktionen

$$2\pi^{1/4} e^{x/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n2\pi\exp(x)} - e^{-x/2}/2\right).$$

5 Zetafunktionen for en potensrække

Lad $\sum c_n x^n$ være en potensrække hvor der findes et tal $\sigma > 0$ således at $|c_n| < n^\sigma$ for n tilstrækkelig stor. Dette medfører at $\sum c_n x^n$ har konvergensradius ≥ 1. Vi definerer *zetafunktionen* $Z_c(s)$ til $\sum c_n x^n$ ved

$$Z_c(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n/n^s.$$

Denne række er absolut konvergent for $Re(s)$ tilstrækkelig stor, og den herved definerede funktion er derfor analytisk. Hvis den kan udvides analytisk, er udvidelsen ikke nødvendigvis meromorf.

Hvis $\sum c_n$ er konvergent med grænseværdi χ, siger Abels sætning som bekendt at $\sum c_n x^n$ har konvergensradius ≥ 1 og at $\lim_{x\to 1}\sum c_n x^n = \chi$. Hvis $\sum c_n$ ikke nødvendigvis er konvergent men $\lim_{x\to 1}\sum c_n x^n$ eksisterer, kaldes $\sum c_n$ Abel-summerbar og grænseværdien kaldes Abel-summen af $\sum c_n$. For eksempel er $\sum (-1)^n$ Abel-summerbar med Abel-summen 1/2.

For $\sum c_n/n^s$ og et givet m ε IN, defineres for j = 0, 1, ..., m - 1 potensrækkerne $\sum c^j{}_n/n^s$ ved $c^j{}_n = c_n$ for n = j (mod m) og ellers 0, så er $Z_c(s) = \sum Z^j{}_c(s)$ (j < m).

Eksempler

1. Zetafunktionen hørende til $\sum x^n = x/(1 - x)$ er Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$. Zetafunktionerne hørende til $\sum x^{2n}$ og $\sum x^{2n+1}$ er henh. $(1/2^s)\zeta(s)$ og $(1 - 1/2^s)\zeta(s)$ - bemærk at den sidste har yderligere nulpunkter i $n2\pi i/\log 2$, n ≥ 0. Zetafunktionen hørende til $\sum (-1)^{n+1}x^n = x/(1 + x)$ betegnes $\eta(s)$, altså

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^s$$

for Re(s) > 1. $\eta(s)$ er forbundet med $\zeta(s)$ ved $\eta(s) = (1 - 2/2^s)\zeta(s)$ og kan derfor udvides analytisk til hele planen, udvidelsen er endda holomorf - som bekendt er $\eta(1) = \log 2$. Rækken $\sum (-1)^{n+1}/n^s$ er konvergent for Re(s) > 0 og den er Abel-summerbar for alle s og Abel-summen er $\eta(s)$.

Af egenskaben ved Möbius-funktionen $\mu(n)$ følger at $(\sum 1/n^s)(\sum \mu(m)/m^s) = 1$ for Re(s) > 1. Zetafunktionen hørende til $\sum \mu(n)x^n$ er altså $1/\zeta(s)$. Det kan vises at Riemanns hypotese er ensbetydende med at $\sum \mu(n)/n^s$ er konvergent for Re(s) > 1/2 - i så fald er grænseværdien $1/\zeta(s)$.

2. Zetafunktionen $Z_p(s)$ hørende til potensrækken $\sum x^p = \sum p_n x^n$ er

$$Z_p(s) = \sum_{p \text{ primtal}} 1/p^s$$

for Re(s) > 1. Af produktformlen for $\zeta(s)$ og af $\log(1 - x) = -\sum x^n/n$ for |x| < 1 fås

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n\, Z_p(ns)$$

for Re(s) > 1. Heraf fås ved Möbius-inversion

$$Z_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \log \zeta(ms)$$

for Re(s) > 1. Da $Z_p(s)$ indeholder logaritmiske bestanddele kan vi ikke forvente at den kan udvides meromorft. Ved differentation fås for $Z'_p(s) = -\sum \log p/p^s$:

$$Z'_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$$

for Re(s) > 1. $Z'_p(s)$ er altså en sum af meromorfe funktioner - den kan udvides analytisk til planen minus den negative talakse.

3. Lad potensrækken $\sum \Lambda_n x^n$ være givet ved $\Lambda_n = \log p$ hvis $n = p^r$ (p primtal, r > 0) og ellers 0. Ved differentation af $\zeta(s) = \prod (1 - 1/p^s)^{-1}$ ses at

$$Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s).$$

Derfor er

$$Z'_p(s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\, Z_\Lambda(ms).$$

4. Zetafunktionen $Z_\sigma(s)$ hørende til potensrækken $\sum \sigma_n x^n$ er for Re(s) > 0

$$Z_\sigma(s) = \sum_{p \text{ primtal}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} mp/(kp^m)^s$$

altså

$$Z_\sigma(s) = \zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} mZ_p(ms - 1).$$

Den er ikke meromorf, men definitionen af σ_n kan ændres lidt således at dens zetafunktion bliver meromorf. Vi definerer $\underline{\sigma}_n$ ved $\underline{\sigma}_1 = 0$ og $\underline{\sigma}_n = m_1 p_1 \log p_1 + ... + m_r p_r \log p_r$ hvis n har primfaktorerne $p_1, ..., p_r$ med multiplicitet $m_1, ..., m_r$. For Re(s) > 0 er

$$Z_{\underline{\sigma}}(s) = \sum_{p \text{ primtal}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} mp \log p/(kp^m)^s$$

altså

$$Z_{\underline{\sigma}}(s) = -\zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} mZ'_p(ms-1).$$

6 Formel for c_n

For en potensrække $\sum c_n x^n$ (således at der findes et $\sigma > 0$ således at $|c_n| < n^\sigma$ for n tilstrækkelig stor) vil vi forsøge at udlede en formel for c_n - evt. blot en tilnærmelsesformel (hvilket vil sige at forholdet mellem formelværdien og c_n konvergerer mod 1 for $n \to \infty$).

Da $\sum c_n x^n$ har positiv konvergensradius følger af Cauchys integralformel at

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0, og heri kan vi, hvis vi indfører variabeltranformationen $x = e^{-y}$ erstatte $\sum c_i x^i = G(y)$ med et integraludtryk indeholdende zetafunktionen Z(s) til $\sum c_i x^i$. Da $\Gamma(s)$ er Fourier-transformationen af e^{-y} er

$$e^{-y} = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\, \Gamma(s)\, ds$$

for $y \in C/\{0\}$ og a > 0, og derfor er

$$\sum c_i x^i = G(y) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\, \Gamma(s) Z(s)\, ds$$

for Re(y) > 0, og hvor a > 0 ligger til højre for alle polerne af Z(s). Altså er

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} G(y)\, e^{ny}\, dy$$

$$= 1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} (1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}\, y^{-s}\, dy)\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$

for $b > 0$.

Vi skal først finde zetafunktionen til $\sum c_n x^n$ - eller rettere, vi skal finde en funktion $Z(s)$ således at $\sum c_n x^n = G(y)$ kan udtrykkes ved $Z(s)$. Dette kan være nyttigt at erindre hvis $Z(s)$ ikke umiddelbart lader sig finde ved at anvende definitionen. Hvis $\sum c_n x^n$ er produktet af to potensrækker $\sum a_n x^n$ og $\sum b_n x^n$ for hvilke vi kender zetafunktionerne $Z_a(s)$ og $Z_b(s)$ og hvor $Z_a(s)$ er meromorf, kan $Z(s)$ findes således:

$$G_a(y) = 1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)Z_a(s)\, ds$$

$$= \sum c^a_\rho\, y^{-\rho} \text{ (sum over polerne } \rho \text{ af } \Gamma(s)Z_a(s))$$

hvor c^a_ρ er residuet af $\Gamma(s)Z_a(s)$ i ρ (vi har forudsat er residuerne udtømmer integralet, se nedenfor). Derfor er

$$G(y) = G_a(y)G_b(y)$$

$$= 1/(2\pi i)\int (\sum c^a_\rho\, y^{-s-\rho})\, \Gamma(s)Z_b(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)(\sum c^a_\rho(\Gamma(s-\rho)/\Gamma(s))Z_b(s-\rho))\, ds$$

således at $Z(s)$ kan erstattes med $\sum c^a_\rho(\Gamma(s - \rho)/\Gamma(s))Z_b(s - \rho)$.

I formlen for c_n skal man udføre den "endelige" integration

$$1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}\, y^{-s}\, dy.$$

Men et sådant integral kan ikke udtrykkes ved elementære funktioner, det kan derimod det tilsvarende integral hvor π erstattes med ∞, idet (side 4)

$$1/(2\pi i)\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{ny}\, y^{-s}\, dy = n^{s-1}/\Gamma(s).$$

Og da dette integral jo er

$$1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s})\, dy$$

er vi ledt til at forsøge i integralet for $G(y)$ og i formlen for c_n at erstatte y^{-s} med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$, altså at finde en omskrivning af formen

$$G(y) = 1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i)\int (\sum (y + k2\pi i)^{-s})\, \Gamma(s)Z(s)\, ds + \text{restled}.$$

Rækken $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$ (sum over k ε Z) er absolut konvergent for Re(s) > 1 (og Re(y) > 0) og den kan udvides til en *hel* funktion i s, idet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s} = 1/\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}/e^{ny}.$$

I næste § vil vi vise hvilken betingelse $\sum c_n x^n$ skal opfylde for at y^{-s} kan erstattes med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$.

7 Asymptotiske potensrækker

Vi vil kalde en reel potensrække $\sum c_n x^n$ for *asymptotisk* hvis der findes reelle tal a, b og c således at

$$c_n/(an^b(\log n)^c) \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

- evt. kan log log n og så videre optræde. Og vi vil kalde $\sum c_n x^n$ asymptotisk i m lag hvis rækkerne $\sum c^j{}_n x^n$ for j = 0, 1, ..., m - 1 er asymptotiske.

Da Z(s) er holomorf for Re(s) tilstrækkelig stor må der findes et mindste reelt tal α (evt. $\alpha = -\infty$) således at Re(s) $\le \alpha$ for enhver pol af Z(s) med residuum $\neq 0$, og da $Z(s^c) = Z(s)^c$ ligger polerne symmetrisk om den reelle akse. Polerne med Re(s) = α og residuum $\neq 0$ er de *principale* poler. Hvis der kun er én principal pol er denne = α, og dette medfører som vi nu skal se, at $\sum c_n x^n$ er asymptotisk med a = $\mathrm{res}_{s=\alpha}Z(s)$ og b = α - 1 hvis polen er ordinær, og med a = $-\mathrm{res}_{s=\alpha}Z'(s)/(\alpha + 1)$ og b = α hvis polen er logaritmisk (at Z(s) har logaritmisk pol i s = α med residuum a, betyder at Z(s) i en omegn af α kan skrives som Z(s) = a log(s - α) + U(s) hvor U(s) er meromorf).

Hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk og vi for G(y) skriver

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$
$$= 1/(2\pi i) \int \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s}\Big)\, \Gamma(s)Z(s)\, ds + \psi(y)$$

hvor funktionen $\psi(y)$ er det der bliver til rest ved denne omskrivning, vil $\psi(y)$ tilfredsstille $\psi(y + 2\pi i)) = \psi(y)$ og have grænseværdi 0 for Re(y) $\to \infty$. Og hvis vi skriver $\psi(y)$ som en potensrække i x (= e^{-y}): $\psi(y) = \sum c'_n x^n$, er $\sum c'_n x^n$ enten ikke asymptotisk eller hvis den er, er b' < b eller b' = b og c' < c.

Tilsvarende hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk i m lag (ε_j = e(j/m)):

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} 1/(2\pi i) \int \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_j{}^k (y + k2\pi i/m)^{-s}\Big)\, \Gamma(s)Z^j(s)\, ds + \psi(y).$$

Når man efter en sådan omskrivning indfører den endelige integration

$$1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny} \dots dy$$

i udtrykket for c_n, fås

$$c_n = 1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds + 1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}\, \psi(y)\, dy$$

eller evt.

$$c_n = m\sum_{j=0}^{m-1} 1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z^j(s)\, ds + 1/(2\pi i)\int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}\, \psi(y)\, dy$$

da

$$1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny}\, (\sum \varepsilon^k (y + k2\pi i/m)^{-s})\, dy = m\, n^{s-1}/\Gamma(s) \text{ for } n = j \text{ (mod m) og ellers } 0$$

hvor $\varepsilon = e(j/m)$.

Vi vil altid se bort fra det sidste integral i denne formel, men vi må naturligvis sikre os at dets bidrag er forsvindende for $n \to \infty$. Og i udregningen af det første integral vil vi oftest nøjes med det eller de første principale led.

Når $Z(s)$ er meromorf kan vi finde de principale led af $1/(2\pi i)\int n^{s-1} Z(s)\, ds$ ved residueregning. Har $Z(s)$ således de simple poler ρ med residuer c_ρ i strimlen $b < \text{Re}(s) < a$, er

$$1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds$$

$$= \sum_{\rho} c_\rho n^{\rho-1} + 1/(2\pi i)\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds.$$

Konvergerer det sidste integral imod 0 for $b \to -\infty$, er det oprindelige integral altså en sum af formen $\sum c_\rho n^{\rho-1}$. Dette vi være tilfældet hvis $|Z(s)| \to 0$ for $|s| \to \infty$ i en halvplan $\text{Re}(s) < b$ - det følger af Jordans sætning der siger at hvis C^-_r er en halvcirkel med radius r i en sådan halvplan, da gælder for $x > 1$ at

$$|\int_{C^-_r} Z(s)\, x^s\, ds| \to 0 \text{ for } r \to \infty.$$

Hvis $Z(s)$ ikke er meromorf men $Z'(s)$ er meromorf (hvilket betyder at $Z(s)$ har logaritmiske poler), kan $\int n^{s-1} Z(s)\, ds$ udregnes ved partiel integration (§ 10).

Eksempler

1. $\sum c_n x^n = \sum n^m x^n$ $(m \geq 0)$ er asymptotisk. Da $Z(s) = \zeta(s - m)$ har vi for $G(y)$

$$1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)\zeta(s - m)\, ds = 1/(2\pi i)\int (\sum (y + k2\pi i)^{-s})\Gamma(s)\zeta(s - m)\, ds + \psi(y)$$

og $\psi(y) = 0$, thi integralet på venstre side er

$$(m!/y^m)(1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i)$$

og integralet på højre side er blot

$$m! \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i)^{m+1}$$

da $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$ er nul på polerne af $\Gamma(s)$, og disse to størrelser er lig hinanden ifølge formlen side 4. Ved indførelse af integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$ fås

$$c_n = 1/(2\pi i) \int n^{s-1} \zeta(s - m)\, ds = n^m.$$

2. $\sum c_n x^n = \sum (-1)^i x^i$ er ikke asymptotisk, for dens zetafunktion $Z(s) = (2/2^s - 1)\zeta(s)$ har ingen poler. Af Cauchys integralformel får vi for c_n (da $\sum (-1)^i x^i = -1/(e^y + 1)$):

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny} (-1/(e^y + 1))\, dy = (-1)^n.$$

Men vi har også $\sum (-1)^i x^i = \sum x^{2j} - \sum x^{2j+1}$ som er asymptotisk i 2 lag, derfor er

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s) Z(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int (\sum (y + k\pi i)^{-s}) \Gamma(s)(1/2^s)\zeta(s)\, ds$$

$$- 1/(2\pi i) \int (\sum (-1)^k (y + k\pi i)^{-s}) \Gamma(s)(1 - 1/2^s)\zeta(s)\, ds$$

($\psi(y) = 0$). Det første integral giver $c_n = 2/2 = 1$ for n lige og ellers 0, det andet integral giver $c_n = -2/2 = -1$ for n ulige og ellers 0.

8 Sumformler

Sumrækken til $\sum c_n x^n$ er givet ved potensrækken $\sum \Sigma c_n x^n = (\sum x^i)(\sum c_j x^j)$, altså $\Sigma c_n = \sum c_i$ (sum over $i < n$). For en sumrække kan vi let og ad en helt anden vej end ovenfor udlede en formel for Σc_n - og som ovenikøbet er helt eksakt:

Fouriers inversionssætning (eller rettere Fourier-Mellins sætning) siger at hvis $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ er stykkevis differentiabel og integralet

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)/x^s\, dx/x$$

er absolut konvergent for $\mathrm{Re}(s) > a_0$, da er

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s\, F(s)\, ds$$

for $a > a_0$, idet højre side i springpunkterne for f(x) giver middelværdier af grænseværdierne fra venstre og højre.

Sætter heri $f(x) = (\sum c)(x)$, defineret ved $f(x) = \sum c_n$ for $n - 1 < x \leq n$, ses at $F(s) = Z(s)/s$. Partiel integration giver nemlig at $s \int (\sum c_n)(x)/x^s\, dx/x = \int x^{-s}\, d(\sum c)(x)$ (Stieltjes-integral) $= \sum c_n/n^s$. Så derfor er

$$(\sum c)(x) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s\, Z(s)\, ds/s$$

hvor værdien af højre side for $x = n$ er $\sum c_n + c_n/2$. Bemærk hvis vi i integralet sætter $Z(s) = \sum c_n/n^s$ får vi umiddelbart venstre side.

Imidlertid kan det være vanskeligt at udregne mere end de principale led af integralet $\int x^s\, Z(s)\, ds/s$ ved residueregning, men da sumrækken er produktet af to potensrækker kan man med fordel benytte metoden i § ...: Da (side 3 og 11, $x = e^{-y}$)

$$\sum x^i = y^{-1} + \sum \alpha_m y^m \ (m \geq 0) \text{ og } \sum c_j x^j = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s) Z(s)\, ds$$

er for $Re(y) > 0$

$$\sum \sum c_n x^n = 1/(2\pi i) \int (y^{-s-1} + \sum \alpha_m y^{-s+m})\, \Gamma(s) Z(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)(Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1) Z(s + m))\, ds.$$

Zetafunktionen til sumrækken for $\sum \sum c_n x^n$ synes altså at være

$$Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1) Z(s + m).$$

Da denne række imidlertid meget vel kan være divergent, er vores omformning ikke uden videre tilladt. Men vi kan skrive zetafunktionen som

$$Z(s - 1)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s...(s + m - 1) Z(s + m) + R_M(s).$$

Hvis $\sum \sum c_n x^n$ er asymptotisk har vi altså

$$\sum c_n = 1/(2\pi i) \int n^{s-1}\, (Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1) Z(s + m))\, ds + \text{rest}$$

hvor resten kommer fra både $R_M(s)$ og $\psi(y)$.

Hvis vi sætter

$$f^{(-1)}(x) = 1/(2\pi i) \int x^{s-1}\, Z(s - 1)/(s - 1)\, ds$$

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int x^{s-1}\, Z(s)\, ds$$

...

$$f^{(m)}(x) = 1/(2\pi i)\int x^{s-1}\,\alpha_m s...(s + m - 1)Z(s + m)\,ds$$

hvor $f^{(m)}(x)$ altså er den m-te afledede af f(x) i formal forstand, er altså

$$\sum c_n = f^{(-1)}(n) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m f^{(m)}(n) + \text{rest.}$$

Bemærk at det første led i sumudtrykket er (-1/2)f(n) og at f(n) er den principale del af c_n hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk, i så fald er dette led er altså $-c_n/2$ + rest.

Hvis vi kun medtager det principale led $f^{(-1)}(n)$ får vi:

$$\sum c_n = 1/(2\pi i)\int n^s Z(s)/s\,ds + \text{rest}$$

- og dette er netop udtrykket ovenfor for n = x. Bidraget $\sum \alpha_m f^{(m)}(n)$ + rest er altså $c_n/2$. Men pointen er, at når vi inddrager zetafunktionen for sumrækken kan vi ofte, i tilfælde hvor potensrækken $\sum c_n x^n$ er asymptotisk, udregne større dele af integralet ved residueregning end når vi udregner $\int n^s Z(s)/s\,ds$ - eksempel 1 nedenfor.

9 Nogle konkrete summationer

1. Lad α være reel og $\neq -1$. Vi vil finde en formel for summen $1^\alpha + 2^\alpha + ... + (n - 1)^\alpha$. Da zetafunktionen til potensrækken $\sum n^\alpha x^n$ er $\zeta(s - \alpha)$, er

$$1^\alpha + 2^\alpha + ... + (n-1)^\alpha = 1/(2\pi i)\int n^s\, \zeta(s - \alpha)\, ds/s - n^\alpha/2.$$

Bidraget fra residuerne i dette integral er $n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \zeta(-\alpha)$, og dette udtømmer tydeligvis ikke integralet. Hvis vi imidlertid benytter at zetafunktionen til sumrækken af $\sum n^\alpha x^n$ er

$$\zeta(s - 1 - \alpha)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s...(s + m - 1)\zeta(s + m - \alpha)) + R_M(s)$$

har vi

$$\begin{aligned}
&1^\alpha + 2^\alpha + ... + (n - 1)^\alpha \\
&= 1/(2\pi i)\int n^{s-1}(\zeta(s - 1 - \alpha)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s...(s + m - 1)\zeta(s + m - \alpha) + R_M(s))\,ds + \text{rest} \\
&= n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \zeta(-\alpha) + \sum_{m=0}^{M} (B_{m+1}/(m + 1)!)\alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (m - 1))n^{\alpha-m} + \text{rest}
\end{aligned}$$

og hvis vi sammenligner denne formel med formlen for $\zeta(s)$ på side ..., ser vi at vi dér skal sætte $s = -\alpha$ og N = n, og at restleddet må være det vi dér betegnede R_M med modsat fortegn. Jo større n er jo større kan M vælges og jo mere nøjagtig tilnærmelse kan vi få. For α hel er rækken endelig:

$$1^\alpha + 2^\alpha + ... + (n - 1)^\alpha = n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \sum_{m=0}^{\alpha-1 \text{ for } \alpha \text{ lige, } \alpha-2 \text{ for } \alpha \text{ ulige}} (B_{m+1}/(m + 1)!)\alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (m - 1))n^{\alpha-m}$$

da $\zeta(-\alpha) = -B_{\alpha+1}/(\alpha + 1)$.

For $\alpha = -1$ må vi udregne $1/(2\pi i)\int n^s\, \zeta(s + 1)\, ds/s$. Da vi omkring $s = 0$ har $n^s = 1 + s \log n + s^2(\log n)^2/2 + ...$ og $\zeta(s + 1) = 1/s + \lambda + ...$ (λ = Eulers konstant = 0,577...), er $n^s\zeta(s + 1)/s = 1/s^2 + (\log n + \lambda)/s + ...$ og vi får ved residueregning at

$$1+ 1/2 + 1/3 + ... + 1/(n - 1) = \log n + \lambda + \text{rest}$$

hvor resten er $-1/(2n)$ + integralet langs en linie med $\mathrm{Re}(s) < 0$.

2. Da zetafunktionen til $\sum x^{n^2}$ er $\zeta(2s)$, er $\sum x^{n^2} = 1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)\zeta(2s)\, ds = \sqrt{\pi}/2\, y^{-1/2} - 1/2$ + rest, og resten kan vi ikke finde ved residueregning da $\zeta(2s)$ er nul på alle polerne for $\Gamma(s)$ med $\mathrm{Re}(s) < 0$. Det følger imidlertid af Poissons sætning for $e^{-\pi x^2}$ (hvis Fourier-transformerede er $e^{-\pi y^2}$) at resten må være $\sum e^{-\pi^2 n^2/y}$. Vi har altså at $(\sum x^{n^2})^2 = \pi/4\, y^{-1}$ + rest, og indføres heri integrationen $1/(2\pi i)\int e^{ny}\, y^{-1}\, dy = n$, ses at det principale led til sumrækken bliver $\pi/4$ n. Men da $(\sum x^{n^2})^2 = 2\sum k_m x^m$, hvor k_m = antallet af måder hvorpå m kan skrives som en sum af to kvadrattal ($\neq 0$), er

$$\sum_{m=1}^{n-1} k_m \approx \pi n/8.$$

Det gennemsnitlige antal måder hvorpå et tal kan skrives som summen af to kvadrattal er altså $\pi/8 \approx 0{,}3927$ - dette resultat kan vises helt elementært med Pythagoras' sætning.

Da $\sum d_n/n^s = \zeta(s)^2$ (for $\mathrm{Re}(s) > 1$), hvor d_n = antallet af divisorer i n (1 og n inkluderet), og da $n^s = nn^{s-1} = n + n \log n\, (s - 1) + ...$ (eksempel 1), er $n^s\zeta(s)^2/s = n/(s - 1)^2 + n(\log n + 2\lambda)/(s - 1) + ...$ (omkring $s = 1$), har vi:

$$\sum_{m=1}^{n-1} d_m = n(\log n + 2\lambda) + \text{rest}$$

- det gennemsnitlige antal af divisorer i de første n tal er altså $\approx \log n$.

Da $(\sum |\mu(k)|/k^s)(\sum 1/m^{2s}) = \sum 1/n^s$, idet ethvert tal n kan skrives entydigt på formen km^2, hvor k ikke indeholder en primfaktor i en højere potens, er zetafunktionen til $\sum |\mu(n)|x^n$ er $\zeta(s)/\zeta(2s)$. Heraf følger at:

sandsynligheden for at n ikke indeholder en primfaktor mere end én gang $\approx 1/\zeta(2)$

$= 6/\pi^2 = 0{,}6079....$

Da zetafunktionen til $\sum \mu(n)x^n$ er $1/\zeta(s)$ (side ...), er $\sum \mu(n)x^n = 1/(2\pi i)\int y^{-s}\, \Gamma(s)/\zeta(s)\, ds = \sum \Gamma(\rho)/\zeta'(\rho))\, y^{-\rho}$ + restled, hvor summen er over nulpunkterne af $\zeta(s)$ i strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ - idet det formodes at alle nulpunkterne af $\zeta(s)$ er simple. Heraf ses at hvis

Riemanns hypotese er sand (altså at $Re(\rho) = 1/2$ og derfor $y^{-\rho} = y^{-it}/\sqrt{y}$) synes $\sqrt{\varepsilon} \sum \mu(n)(1 - \varepsilon)^n$ at være begrænset for $\varepsilon \to 0$ (da $x = 1 - \varepsilon \Rightarrow y = -\log x \approx \varepsilon$). Riemanns hypotese kan faktisk vises at være ensbetydende med påstanden at for $c > 1/2$ gælder $\varepsilon^c \sum \mu(n)(1 - \varepsilon)^n \to 0$ for $\varepsilon \to 0$. For sumrækken til $\sum \mu(n)x^n$ har vi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu(k) = 1/(2\pi i) \int n^s/\zeta(s)\, ds/s - \mu(n)/2$$

$$= \sum n^\rho/(\rho\zeta'(\rho)) + \text{restled}.$$

Hvis Riemanns hypotese er sand synes derfor $1/\sqrt{n} \sum \mu(k)$ $(k < n)$ at være begrænset. Dette kan formuleres således: de tal der ikke indeholder en primfaktor i en højere potens kan deles i to klasser: de der består af et ulige antal primfaktorer og de der består af et lige antal primfaktorer, og der findes et tal A således at

$$|\#\{\text{første klasse} < n\} - \#\{\text{anden klasse} < n\}| < A\sqrt{n}$$

for n tilstrækkelig stor (A synes at kunne vælges $\leq 1/2$). Denne påstand (Mertens formodning) er ikke bevist, derimod kan det bevises at Riemanns hypotese er ensbetydende med at for $c > 1/2$ gælder

$$1/n^c \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

3. Vi vil finde sumrækken $\sum \psi_n x^n$ til $\sum \Lambda_n x^n$. $\psi_n = \psi(n)$ kaldes Chebyshevs ψ-funktion og er altså givet ved $\psi_n = \sum \log p$ (sum over $p^r < n$, p primtal og $r > 0$). Da $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ (§ ..) har vi ved residueregning

$$\psi_n = 1/(2\pi i) \int n^s (-\zeta'(s)/\zeta(s))\, ds/s - \Lambda_n/2$$

$$= n - \sum_\rho n^\rho/\rho - \zeta'(0)/\zeta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-2k}/(2k) - \Lambda_n/2$$

$$= n - \sum_\rho n^\rho/\rho - \log(2\pi) + \log(n^2/(n^2 - 1))/2 - \Lambda_n/2$$

idet det kan vises at residuerne udtømmer integralet og $\zeta'(0)/\zeta(0) = \log(2\pi)$. Det kan vises at leddet $\sum n^\rho/\rho$ er forsvindende for $n \to \infty$ (se nedenfor), derfor er

$$\psi_n \approx n$$

- for n = 50.000 er $\psi_n = 49.986$.

Tilsvarende kan vi finde sumrækken $\sum \theta_n x^n$ til $\sum \underline{\pi}_n x^n = \sum \log p\, x^p$. $\theta_n = \theta(n)$ kaldes Chebyshevs θ-funktion og er altså givet ved $\theta_n = \sum \log p$ (p primtal < n). Da $Z_{\underline{\pi}}(s) = -Z'_p(s) = -\sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$ (side 10) har vi ved residueregning

$$\theta_n = \sum \mu(m)/(2\pi i) \int n^s (-\zeta'(ms)/\zeta(ms))\, ds/s - \underline{\pi}_n/2$$

$$= \sum \mu(m)(n^{1/m} - \sum m\, n^{\rho/m}/\rho - \log(2\pi) + m \log(n^{2/m}/(n^{2/m} - 1))/2) - \underline{\pi}_n/2$$

$\approx \sum \mu(m)n^{1/m}$

$\approx n$

- for n = 50.000 er θ_n = 49.731,3 og $\sum \mu(m)n^{1/m}$ = 49.732,5. Formlen kan også formuleres således: produktet af primtallene op til n er $\approx e^n$.

4. Da zetafunktionen til $\sum \underline{\sigma}_n x^n$ er $-\zeta(s)\sum mZ'_p(ms - 1)$, har vi for $\underline{b}_n = \sum\underline{\sigma}_n$

$$\underline{b}_n = -\sum_{m=1}^{\infty} 1/(2\pi i) \int n^s \zeta(s)mZ'_p(ms - 1)\, ds/s + \text{rest.}$$

Vi vil udregne de to første led. Da $Z'_p(ms - 1) = \sum \mu(k)\zeta'(k(ms - 1))/\zeta(k(ms - 1))$ (§ 6) og da $\zeta'(s)/\zeta(s) = (d/ds)(\log\zeta(s))$ har principal pol i s = 1 med residuum -1, skal vi udregne $-\sum 1/(2\pi i) \int n^s \zeta(s)(\zeta'(s - 1)/\zeta(s - 1) - \zeta'(2s - 2)/\zeta(2s - 2))\, ds/s$ i polerne s - 1 = 1 og 2s - 2 = 1, svarende til s = 2 og s = 3/2. Vi får

$$\underline{b}_n/n \approx \zeta(2)/2\ n - 2\zeta(3/2)/3\ \sqrt{n}$$

- hvor $\zeta(2)/2 = \pi^2/12$ = 0,8225 og $2\zeta(3/2)/3$ = 1,7416. For n = 100000 er den sande værdi af $\underline{b}_n/n$ = 81965 og formelværdien 81699 – første led er 82250. Vi vil nedenfor udlede en formel for b_n.

5. Vi vil nu udlede Riemanns formel for π_n. Da zetafunktionen til $\sum x^p$ er $Z_p(s) = \sum \mu(m)/m \log \zeta(ms)$, har vi (for a > 0)

$$\pi_n = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^s Z_p(s)/s\, ds - p_n/2.$$

Da $Z_p(s)$ ikke er meromorf men den afledede $Z'_p(s)$ er meromorf, anvender vi partiel integration:

$$\int n^s Z_p(s)\, ds/s = \lim_{r\to\infty}\Big[\Big(\int^s n^t\, dt/t\Big)Z_p(s)\Big]_{a-ri}^{a+ri} - \int \Big(\int^s n^t\, dt/t\Big)Z'_p(s)\, ds.$$

Imidlertid er grænseovergangen, og dermed også det andet integral, divergent. Men hvis vi kan vise at

$$\int_{C_r^-} n^s Z_p(s)\, ds/s \to 0 \ \text{ for } \ r \to \infty$$

hvor C_r^- er den venstre halvcirkel fra a - ri til a + ri, følger at resultatet af integrationen er summen af residuerne i det sidste integral. Hvis vi i integralet $\int n^s Z_p(s) ds/s$, indsætter $Z_p(s) = \sum \mu(m)/m \log \zeta(ms)$ og (side ...)

$$\log\zeta(s) = -\log(s - 1) + \sum_{\rho} \log(1 - s/\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} (\log(s + 2k) - s(1 + 1/k)/2)) + s(\log \pi)/2 - \log 2$$

og udregner integralet ledvis langs halvcirklen, vil leddene med s(...) divergerer, hvis vi derimod anvender partiel integration

$$\int_{C_r^-} n^s Z_p(s)\,ds/s = (1/\log n)(\lim_{r\to\infty}[n^s Z_p(s)/s]^{a+ri}_{a-ri} - \int_{C_r^-} n^s\, d/ds(Z_p(s)/s)\,ds)$$

ser vi at begge led på højre side går mod 0 for $r \to \infty$: grænseovergangen da $|n^{a\pm ri} \log \zeta(a \pm ri)/(a \pm ri)| < n^a \log \zeta(a)/|a \pm ri| \to 0$ for $r \to \infty$ og integralet som følge af Jordans sætning da $|d/ds(Z_p(s)/s)| \to 0$ for $|s| \to \infty$.

Vi har altså at π_n er integralet

$$1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} (\int^{s} n^t\,dt/t) Z'_p(s)\,ds$$

udregnet ved residueregning $(-p_n/2)$. Herved har vi fået introduceret en ny funktion $\int n^t\,dt/t$ hvor det er mest hensigtsmæssigt at starte integrationen i $-\infty$. Da dette integral er $\int n^{st}\,dt/t$ (integration fra $-\infty$ til 1) for $Re(s) > 0$ og $\int n^{st}\,dt/t$ (integration fra 1 til ∞) for $Re(s) < 0$, definerer vi funktionen $Li(x)$ $(Re(x) > 0)$ (integrallogaritmen) ved

$$Li(x) = \int_{-\infty}^{1} x^t\,dt/t$$

for $|x| > 1$ og

$$Li(x) = \int_{1}^{\infty} x^t\,dt/t$$

for $|x| < 1$.

Da nu $Z'_p(s) = \sum \mu(m)/m\,(d/ds)(\log \zeta(ms))$ og $(d/ds) \log \zeta(s) = -1/(s - 1) + \sum 1/(s - \rho) + \sum(1/(s + 2k) - \log(1 + 1/k)/2) + (\log \pi)/2$, får vi at summen af residuerne af $1/(2\pi i)\int Li(n^s)\,Z'_p(s)\,ds$ er

$$\sum \mu(m)/m\; J(n^{1/m})$$

hvor

$$J(x) = - Li(x) + \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) + \sum_{k=1}^{\infty} Li(x^{-2k}).$$

Det sidste led er

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum Li(x^{-2k})\ (k > 0) \\ &= \sum \int_{1}^{\infty} x^{-2ky}\,dy/y \\ &= -\int_{1}^{\infty} 1/(x^{2y} - 1)\,dy/y \end{aligned}$$

- bemærk at $H(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Vi har altså

$$\pi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m\; J(n^{1/m}) - p_n/2$$

hvor

$$J(x) = Li(x) - \sum Li(x^\rho) - H(x).$$

Hadamard og la Vallée Poussin beviste i 1896 (uafhængigt af hinanden) *primtalssætningen:*

$$\pi_n/(n/\log n) \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

- dette er ækvivalent med $\psi_n/n \to 1$ eller $\theta_n/n \to 1$ for $n \to \infty$ (altså at restleddet i vores ovenfor fundne formler for ψ_n og θ_n er forsvindende). Hadamard og la Vallée Poussin viste ydermere at

$$\pi_n = Li(n) + O(n/e^{A\sqrt{\log n}})$$

hvor $A > 0$.

Da $Li(x)/(x/\log x) \to 1$ for $x \to \infty$, følger af primtalssætningen at bidraget fra $\sum Li(x^\rho)$ er forsvindende. Denne række er dog kun betinget konvergent: den skal naturligvis fortolkes som $\sum (Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}))$ (da de ikke-trivielle nulpunkter til $\zeta(s)$ optræder i par ρ, $1 - \rho$, som er hinandens konjugerede hvis Riemanns hypotese gælder), og de enkelte led $Li(x^\rho)$ vokser kraftigt, nemlig af størrelsesorden $\sqrt{x}/\log x$.

Vi har altså tilnærmelserne

$$\begin{aligned} \pi_n &\approx \sum \mu(m)/m\, Li(n^{1/m}) \\ &\approx Li(n) \\ &\approx n/\log n. \end{aligned}$$

Det er let at udregne $\sum \mu(m)/m\, Li(n^{1/m})$, thi ved succesiv differentation i $x = 1$ og anvendelse af $\sum \mu(m)/m^n = 1/\zeta(n)$ fås følgende hurtigt konvergerende rækkeudvikling:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m\, Li(x^{1/m}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n/(\zeta(n+1)n\,n!)$$

- Gram, 1893.

Den anden tilnærmelse, $\pi_n \approx Li(n)$, blev postuleret af den 15-årige Gauss, idet han havde observeret at tætheden af primtallene er nær $1/\log x$. For reelle positive x gælder nemlig

$$\begin{aligned} Li(x) &= \int_{-\infty}^{1} x^y\, dy/y \\ &= \int_{0}^{x} dy/\log y \end{aligned}$$

- Gauss integrerede dog fra 2 til x, afvigelsen er kun omkring 1.

For n = 10.000.000 er π_n = 664.579, fejlen ved benytte de tre tilnærmelser er henh. 0,01 %, 0,05 % og 6,6 %. Tilnærmelsen $\pi_n \approx n/\log n$ er altså dårlig, dette gælder også tilnærmelsen i … til μ_n - vi vil i § ... finde en bedre.

Det kan vises (von Koch, 1901) at Riemanns hypotese er ækvivalent med

$$\pi_n = \mathrm{Li}(n) + O(n^{1/2} \log n).$$

Men det gælder også at $2|\pi_n - \mathrm{Li}(n)|/\sqrt{n} > 1/\log n$ for uendelig mange n - dette gælder endda både hvis $\pi_n - \mathrm{Li}(n)$ forudsættes positiv eller negativ (Littlewood, 1914). $\pi_n - \mathrm{Li}(n)$ er negativ for alle n hvor dette tal er beregnet.

Det kan vises (Dirichlet, 1839, se § ...) at for et givet naturligt tal $k > 1$ og et tal $h < k$ og primisk med k, er der uendelig mange primtal i restklassen $h + lk$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$) - endda "lige mange" i hver af restklasserne modulo k: hvis vi lader $\pi(n, k, h)$ være antallet af primtal $p < n$ således at $p = h$ (modulo k), er (for eksempel)

$$\pi(n, k, h) \approx \mathrm{Li}(n)/\phi(k).$$

Siegel-Walfisz' sætning (1936) generaliserer Hadamard & la Vallée Poussins resultat: for ethvert $B > 0$ findes et $A > 0$ således at for $k < (\log n)^B$ gælder

$$\pi(n, k, h) = \mathrm{Li}(n)/\phi(k) + O(n/e^{A\sqrt{\log(n)}}).$$

Halberstams formodning siger at for ethvert reelt tal A findes et tal $\varepsilon < 1$ således at

$$\sum_{k=1}^{[n^{1-\varepsilon}]} \max_h|\pi(n, k, h) - \mathrm{Li}(n)/\phi(k)| = O(n/(\log n)^A).$$

Det hidtil bedste resultat i den retning som er bevist, er *Bombieris middelværdisætning* (1965), den fremkommer når man heri erstatter $n^{1-\varepsilon}$ med $\sqrt{n}/(\log n)^B$. Sådanne sætninger spiller som vi skal se en betydelig rolle i mange beviser for resultater der er beslægtet med Goldbachs formodning.

I sin udledning af formlen for π_n gik Riemann en smule anderledes tilværks end os, idet han udregnede

$$J(x) = 1/(2\pi i \log x) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s\, (d/ds)(\log \zeta(s)/s)\, ds$$

hvor integranden ikke er meromorf, ved differentation. Resultatet er følgende formel:

$$1/(2\pi i \log x) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s\, (d/ds)(\log(s/\rho - 1)/s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i \log x) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s\, (d/ds)(\log(1 - s/\rho)/s)\, ds \pm \pi i \quad (+ \text{ for } \mathrm{Im}(\rho) > 0, - \text{ for } \mathrm{Im}(\rho) < 0)$$

$$= \int_0^x t^{\rho-1}/\log t\, dt \text{ for } \mathrm{Re}(\rho) > 0$$

og

$$= -\int_x^\infty t^{\rho-1}/\log t \, dt \pm \pi i \text{ for } \mathrm{Re}(\rho) < 0.$$

Herved får $J(x)$ dog et ekstra led $-\log 2$, som imidlertid forsvinder igen da $\sum \mu(m)/m = 0$.

6. For sumrækken til $\sum p x^p$ får vi ganske analogt - da zetafunktionen til denne række er $Z_p(s - 1)$)

$$\sum_{p \text{ primtal} < n} p \approx \sum \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(n^{1+1/m}) \; (m > 0)$$

$$\approx \mathrm{Li}(n^2).$$

Og for sumrækken til $\sum x^p/p$ får vi, da $\mathrm{Li}(n^s) = \log\log n + s \log n + \ldots$ omkring $s = 0$:

$$\sum_{p \text{ primtal} < n} 1/p \approx \log\log n.$$

7. Da zetafunktionen til $\sum \sigma_n x^n$ er $\zeta(s)\sum mZ_p(ms - 1)$ $(m \geq 1)$, som er ikke-meromorf, skal vi bruge partiel integration for at få en tilnærmelsesformel for $b_n = \sum\sigma_n$. Vi skal udregne

$$1/(2\pi i) \int (n^s \zeta(s)/s) \, Z_p(s - 1) \, ds = -1/(2\pi i) \int \left(\int_1^s n^u \zeta(u) \, du/u\right) Z'_p(s - 1) \, ds.$$

Da $Z'_p(s - 1) = -(d/ds) \log(s - 2) + \text{rest} = -1/(s - 2) + \text{rest}$, er resultatet integralet med t udregnet i $s = 2$. Ved substitutionen $u = \log t / \log n$ fås

$$b_n \approx \int_1^{n^2} \zeta(\log t/\log n) \, dt/\log t$$

- for $n = 10000$ er den sande værdi af $b_n/n = 1022$ og formlen giver 1035. En nemmere men dårligere tilnærmelse til b_n/n er $\zeta(2)/2 \; n/\log n$ - den giver 893. Hvis man i denne tilnærmelse erstatter $n/\log n$ (som jo er en dårlig tilnærmelse til π_n) med π_n fås en meget bedre tilnærmelse til b_n/n - den giver 1011.

10 Svingende asymptotiske potensrækker – Goldbachs formodning og en beslægtet formodning

Potensrækkerne $\sum \pi_n x^n$ og $\sum b_n x^n$ er asymptotiske, og vi har fundet tilnærmelsesformler for π_n og b_n. Potensrækkerne $\sum \mu_n x^n$ og $\sum a_n x^n$ er ikke asymptotiske, men "svingende" asymptoriske: En potensrække $\sum c_n x^n$ er svingende asymptotisk hvis

$$c_n/(af(n)n^b(\log n)^c) \to 1 \;\text{ for }\; n \to \infty$$

hvor f(n) er en funktion der svinger omkring 1 men ikke konvergerer. Derfor svigter vores ovenfor beskrevne fremgangsmåde til at finde c_n, fordi væsentlige dele af integralet G(y) bliver overført til restfunktionen $\psi(y)$ når vi erstatter y^{-s} med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$. Vi må finde en anden fremgangsmåde.

Inden vi går i gang skal vi erindre, at ligesom de ovenstående formler for $\underline{\pi}_n$ og $\underline{b}_n$ er simplere end formlerne for π_n og b_n, fordi zetafunktionerne er meromorfe, bør vi i første omgang, i stedet for at udlede formler for μ_n og a_n, udlede formler for $\underline{\mu}_n$ givet ved $\sum \underline{\mu}_n x^n = (\sum \log p\ x^p)^2$ og for $\underline{a}_n$ givet ved $\sum \underline{a}_n x^n = (\sum \log p\ x^p)(\sum \underline{\sigma}_j x^j)$. Dermed får vi også tilnærmelsesformler for μ_n og a_n, idet $\mu_n/(\underline{\mu}_n/(\log n)^2) \to 1$ og $a_n/(\underline{a}_n/(\log n)^2) \to 1$. Vi kan så bagefter vende os mod det ikke-meromorfe tilfælde.

Metoden vi vil benytte - *cirkelmetoden* - blev introduceret i en afhandling af Hardy og Ramanujan fra 1918, og den blev anvendt i en række afhandlinger om opspaltningsproblemer af Hardy og Littewood fra 1920-28 ("Partitio Numerorum I-VIII"). I integrationen

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0, foretages en opdeling af C i et endeligt antal buestykker C_i (i = 0, 1, ..., N) centreret omkring de punkter hvor $\sum c_i x^i$ har særlig store udsving.

Hvis vi i stedet for substitutioen $x = e^{-y}$ anvender $x = e(\theta)e^{-y}$, hvor $e(\theta) = e^{\theta 2\pi i}$ og $0 \leq \theta \leq 1$, får vi en ny zetafunktion, nemlig zetafunktionen hørende til rækken $\sum c_n(e(\theta)x)^n$:

$$Z^\theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e(\theta)^n c_n/n^s.$$

Da vi har forudsat at Z(s) er meromorf, er $Z^\theta(s)$ også meromorf. Der er et reelt tal λ således at der er simple poler s for Z(s) med Re(s) = λ og således at Re(s) $\leq \lambda$ for de øvrige simple poler s. Dette medfører at for enhver simpel pol s for $Z^\theta(s)$ er Re(s) $\leq \lambda$. Vi vil antage at Z(s) kun har én simpel pol s med Re(s) = λ. Denne pol er altså = λ, og dens residuum vil vi betegne c^0.

Vi sætter $\theta_0 = 0$ og lader θ_i, for i = 1, ..., N, være de θ hvor residuet af $Z^\theta(s)$ i punktet λ er numerisk større end et givet tal, og vi lader θ_i-erne være ordnet efter faldende størrelse af disse residuer som vi vil betegne c^i, i = 1, ..., N. For hvert i = 0, 1, ..., N vælges et delinterval af [0, 1] således at θ_i ligger "inde i midten" af dette (se eksemplet i næste §) og således at disse delintervaller udgør en opdeling af [0, 1] - vi identificerer 0 og 1.

Lad cirklen vi skal integrere over være givet ved $e^{-b}e(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$ (b > 0 fast). Når $e^{-(b+ti)}e(\theta_i)$ gennemløber buestykket C_i, gennemløber t et interval $-\omega_i^- \leq t \leq \omega_i^+$. Vi har nu:

$$c_n = \sum_{i=0}^{N} 1/(2\pi i) \int_{C_i} (\sum c_j x^j)/x^{n+1}\, dx$$

$$= \sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{b-\omega_i^- i}^{b+\omega_i^+ i} e^{ny}\,(1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\,\Gamma(s)Z^i(s)\,ds)\,dy$$

$$= \sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} (1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{ny}\,y^{-s}\,dy)\,\Gamma(s)Z^i(s)\,ds + \text{restled (beroende på at vi har erstattet } \omega_i^{\pm} \text{ med } \infty)$$

$$= \sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1}\,Z^i(s)\,ds + \text{restled}$$

$$= \kappa(n)\,n^{\lambda-1} + \text{nyt restled (beroende på at vi har udeladt de ikke-principale poler)}$$

hvor $\kappa(n) = \sum e(-\theta_i)^n c^i$ $(i \le N)$. Hvis vi, i stedet for at definere c^i som residuet af $Z^i(s)$ i punktet λ, definerer c^i, nu kaldet $\underline{c}^i$, ved $1/(2\pi i) \int y^{-s}\,\Gamma(s)Z^i(s)\,ds = \underline{c}^i\,y^{-\lambda}$ + restled, lyder formlen

$$c_n = \kappa(n)\,n^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda) + \text{restled}$$

hvor $\kappa(n) = \sum e(-\theta_i)^n\,\underline{c}^i$.

Da opdelingen af cirklen er fremkommet ved en procedure som kan fortsættes i det uendelige, vil vi lade summationen i definitionen af $\kappa(n)$ fortsætte i det uendelige - herved indføres igen en fejl som føres over til i restleddet.

Men alt dette forudsætter at restleddet og summen i $\kappa(n)$ konvergerer, og selvom dette er tilfældet, har udtrykket for c_n naturligvis kun interesse hvis det kan bevises (eller i det mindste formodes) at restleddet er forsvindende i forhold til det principale led for $n \to \infty$. I de tilfælde vi vil betragte, er rækken $\sum c_n x^n$ fremkommet som et produkt af to eller flere rækker, og det betyder at summen i $\kappa(n)$ konvergerer - derfor konvergerer restleddet også, men om vi kan bevise at det er forsvindende er en anden sag.

11 Opdeling af cirklen

For $k \in$ IN har gruppen $(Z/kZ)^*$ orden $\phi(k)$, og vi lader χ_r $(r = 1, ..., \phi(k))$ være karaktererne på $(Z/kZ)^*$ - her er χ_1 den principale karakter: $\chi_1(j) \equiv 1$. $\chi_r(n)$ kan defineres for alle $n \in Z$, da $\chi_r(n + k) = \chi_r(n)$ og hvis vi sætter $\chi_r(n) = 0$ hvis n ikke er primisk med k. Vi vil hyppigt udnytte at

$$\sum_{r=1}^{\phi(k)} \chi_r(n) = \phi(k) \text{ hvis } n = 1 \text{ (mod k) og ellers } 0.$$

Vi vil nu se hvordan tallene θ_i kan findes. For et givet tal $\theta \in [0, 1]$ skal vi finde residuet for den meromorfe udvidelse af $Z^\theta(s) = \sum e(\theta)^n c_n/n^s$ i $s = \lambda$ (i forhold til c^0) - dette tal kan naturligvis være 0.

Vi antager først at θ er rational $\theta = h/k$ (uforkortelig), og endvidere at k er et primtal p. For $Re(s) > 1$ er

$$Z^{h/p}(s) = \sum e(h/p)^n c_n/n^s$$

$$= \sum_{p|n} e(h/p)^n c_n/n^s + \sum_{p|^c n} e(h/p)^n c_n/n^s$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + \sum_{j=1}^{p-1} e(h/p)^j \sum_{n=j \ (\mathrm{mod}\ p)} c_n/n^s.$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + 1/\phi(p) \sum_{j\ \varepsilon\ (Z/pZ)^*} e(h/p)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum \chi_r(n)c_n/n^s$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + 1/\phi(p) \sum e(h/p)^j \sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)c_n/n^s$$
$$+ 1/\phi(p) \sum e(h/p)^j \sum_{r\varepsilon T^c} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)c_n/n^s$$

hvor T er mængden af de r hvor $\chi_r(n) = 1$ for alle undtagen endelig mange af de n hvor $c_n \neq 0$. Lad os antage at for r ε T^c er $\sum \chi_r(n)c_n/n^s$ regulær i s = λ - dette gælder for alle de rækker vi vil betragte - da kan vi se bort fra bidragene fra r ε T^c da vi kun skal bruge residuerne af rækkerne. Endvidere kan vi for r ε T sætte $\chi_r(n) = 1$ for *alle* n hvor $c_n \neq 0$. Derfor har vi

$$Z^{h/p}(s) = 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + 1/\phi(p) \left(\sum e(h/p)^j \left(\sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1}\right)\right)\left(\sum c_n/n^s - 1/p^s \sum c_{pn}/n^s\right).$$

Hvis residuet af $\sum c_{pn}/n^s$ i forhold til Z(s) i s = λ er α, er residuet af $Z^{h/p}(s)$ i forhold til Z(s) givet ved

$$\alpha/p^\lambda + 1/\phi(p) \left(\sum e(h/p)^j \left(\sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1}\right)\right)(1 - \alpha/p^\lambda).$$

Er T = {1} er $\sum e(h/p)^j (\sum \chi_r(j)^{-1}) = \sum e(h/p)^j = \mu(p) = -1$.

Hvis k er sammensat må vi fortsætte disse overvejelser, dette vil vi dog kun gøre i de konkrete tilfælde.

Eksempler

1. For rækken $\sum \Lambda_n x^n$, hvor Λ_n = log p hvis n = p^r (p primtal, r > 0) og ellers 0, er zetafunktionen $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, derfor er $\lambda = 1$ og $c^0 = 1$. Vi har (for k vilkårlig)

$$Z^{h/k}{}_\Lambda(s) = \sum e(h/k)^n \Lambda_n/n^s$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\(j,k)=1}}^{k-1} e(h/k)^j \sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_{lk+j}/(lk + j)^s$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} e(h/k)^j \sum_{p,m\ p^m=j\ (\mathrm{mod}\ k)} \log p/p^{ms}$$

$$= 1/\phi(k) \sum_{j\varepsilon(Z/kZ)^*} e(h/k)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_p\sum_m \chi_r(p^m) \log p/p^{ms}.$$

Hvis $\chi_r(n) = 1$ på alle primtalspotenser er $r = 1$, i modsat fald er bidraget fra r en holomorf funktion. Vi vil finde et udtryk for opspaltningen, men allerede nu kan vi se at forholdet imellem residuerne af $Z^{h/k}{}_\Lambda(s)$ og $Z_\Lambda(s)$ i $s = \lambda$ er $\mu(k)/\phi(k)$, da $\sum e(h/k)^j = \mu(k)$.

Zetafunktionerne $L_r(s)$ ($r = 1, ..., \phi(k)$) (Dirichlets L-funktioner) defineres ved

$$L_r(s) = \sum \chi_r(n)/n^s = \prod (1 - \chi_r(p)/p^s)^{-1}$$

for $Re(s) > 1$. $L_r(s)$ kan udvides meromorft til hele planen og tilfredsstiller en funktionalligning som har lighed med funktionalligningen for $\zeta(s)$. For $L_1(s)$, som er givet ved

$$L_1(s) = \sum_{(n,k)=1} 1/n^s = \prod_{p|^c k} (1 - 1/p^s)^{-1}$$

for $Re(s) > 1$, er udvidelsen $= \zeta(s) \prod (1 - 1/p^s)$ (produkt over primfaktorerne i k). Den har én pol, nemlig i $s = 1$, med residuum $\prod (1 - 1/p)$ (produkt over primfaktorerne i k). For $r > 1$ er $L_r(s)$ holomorf. Alle $L_r(s)$ har uendelig mange nulpunkter i halvplanen $Re(s) > 0$ og "Riemanns hypotese" for disse zetafunktioner siger at for alle nulpunkterne er $Re(s) = 1/2$.

Ved differentation fås

$$L'_r(s)/L_r(s) = -\sum_p\sum_m \chi_r(p^m) \log p/p^{ms}$$

for $Re(s) > 1$. Derfor er

$$Z^{h/k}{}_\Lambda(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \kappa_r(h/k)\, L'_r(s)/L_r(s)$$

hvor $\kappa_r(h/k) = \sum e(h/k)^j\chi_r(j)^{-1}$ (sum over $j \ \varepsilon\ (Z/kZ)^*$) - specielt er $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$. Ved analoge udregninger fås

$$Z^h{}_\Lambda(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \chi_r(h)^{-1}\, L'_r(s)/L_r(s)$$

hvor $Z^h{}_\Lambda(s) = \sum \Lambda^h{}_n/n^s$ med $\Lambda^h{}_n = \Lambda_n$ for $n = h \pmod k$ og ellers 0 (§ ...). Da højre side har pol i $s = 1$ og venstre side er $\sum \log p/p^s$ (sum over p således at $p = h \pmod k$) + en funktion der er regulær i $s = 1$, ses at *der er uendelig mange primtal i enhver restklasse*. Der findes ikke noget elementært bevis for dette resultat som skyldes Dirichlet.

2. For $Z'_p(s)$ - zetafunktionen til $-\sum \log p\, x^p$ - som er lig $\sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$ ($m \geq 1$), er $\lambda = 1$ og residuet af $Z'_p{}^{h/k}(s)$ i forhold til $Z'_p(s)$ er $-\mu(k)/\phi(k)$.

3. For $Z_{\underline{\sigma}}(s) = -\zeta(s)\sum mZ'_p(ms - 1)$ $(m \geq 1)$ (§ ...), er $\lambda = 2$ og $c^0 = \zeta(2)$. Lad for $m \varepsilon$ IN m_0 være produktet af m's primfaktorer. Vi vil vise at residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ er $\mu(k_0)k_0/k^2$, altså $\mu(k)/k$ hvis k er kvadratfri.

Vi antager først at k er ulige. Hvis k er et primtal p er

$$\sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s = 1/p^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s + 1/\phi(p) \sum_{j=1}^{p-1} e(h/p)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)\, \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$= (1/p^s + (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/p^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s + \text{rest}$$

hvor resten er regulær i s = 2, da $\underline{\sigma}_{pn} = \underline{\sigma}_p + \underline{\sigma}_n$ er $\sum \underline{\sigma}_{pn}/(pn)^s = \underline{\sigma}_{p/}p^s\, \zeta(s) + 1/p^s\, Z_{\underline{\sigma}}(s)$. Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$1/p^2 + \mu(p)/\phi(p))(1 - 1/p^2) = -1/p.$$

Hvis k er produktet af to forskellige primtal p og q er

$$\sum e(h/pq)^n \underline{\sigma}_n/n^s = 1/p^s \sum e(h/q)^n \underline{\sigma}_n/n^s + 1/q^s \sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s - 1/(pq)^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$+ (\mu(pq)/\phi(pq))(1 - 1/p^s - 1/q^s + 1/(pq)^s) \sum \underline{\sigma}_n/n^s + \text{rest}$$

hvor resten er regulær i s = 2. Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$(1/p^2)(-1/q) + (1/q^2)(-1/p) - 1/(pq)^2 + (\mu(pq)/\phi(pq))(1 - 1/p^2 - 1/q^2 + 1/(pq)^2) = 1/(pq).$$

Generelt er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ for k ulige lig $\mu(k_0)k_0/k^2$.

For k lige antager vi at k er 2 eller 2p. Hvis k = 2 er (på nær en funktion der er regulær i s = 2)

$$\sum e(1/2)^n \underline{\sigma}_n/n^s = \sum (-1)^n \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$= \sum \underline{\sigma}_n/n^s \text{ (n lige)} - \sum \underline{\sigma}_n/n^s \text{ (n ulige)}$$

$$= (1/2^s - (1 - 1/2^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s = (2/2^s - 1) \sum \underline{\sigma}_n/n^s.$$

Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig -1/2.

Hvis k = 2p er (på nær en funktion der er regulær i s = 2)

$$\sum e(h/2p)^n \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$= 1/2^s \sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s + 1/p^s \sum e(h/2)^n \underline{\sigma}_n/n^s - 1/(2p)^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$+ 1/\phi(p) \sum_{j=1 \text{ j ulige } j\neq p}^{2p-1} e(h/(2p))^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_{(n,2p)=1} \chi_r(n)\, \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$= 1/2^s \sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$+ ((1/p^s)(2/2^s - 1) - 1/(2p)^s - (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/2^s - 1/p^s + 1/(2p)^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s$$

da $\sum_{j=1\ j \text{ ulige } j\neq p}^{2p-1} e(h/(2p))^j = -\mu(p)$.

Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$(1/2^2)(-1/p) + (1/p^2)(-1/2) - 1/(2p)^2 - (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/2^2 - 1/p^2 + 1/(2p)^2) = 1/(2p).$$

Generelt er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig $\mu(k_0)k_0/k^2$.

I disse eksempler aftager det principale residuum for $Z^{h/k}(s)$ med voksende k. Hvis θ er irrational er $Z^{\theta}(s)$ derfor regulær i punktet $s = \lambda$.

Tallene θ_i skal altså være rationale. Vi vælger et naturligt tal N og lader θ_i-erne være brøkerne h/k (k = 1, 2, ..., N, h = 0 for k = 1, og h = 1, ..., k - 1, h primisk med k, for k > 1) ordnet leksikografisk ($\theta_0 = 0$). Intervallerne der skal udgøre en opdeling af [0, 1] og hver indeholde en af disse brøker, dannes ved hjælp af Farey-intervaller: vi starter med brøkerne 0/1 og 1/1 og danner succesivt nye brøker (der skrives på uforkortelig form) således: hvis p/q og p'/q' er to nabobrøker, da er brøken (p + p')/(q + q') (som ligger imellem disse) igen en brøk i rækken. Vi fortsætter til alle brøkerne h/k er med. Hvis p'/q' og p"/q" er brøkerne umiddelbart til venstre og højre for h/k, lader vi $I_{h,k}$ være intervallet [h/k - 1/(k(k + q')), h/k + 1/(k(k + q"))] og (idet 0 og 1 identificeres), vi lader $I_0 = I_1$ være "intervallet" sammensat af [0, 1/(1 + N)] og [1 - 1/(1 + N), 1].

12 Formel for $\underline{\mu}_n$ - Goldbachs funktion

Vi vil udlede en tilnærmelsesformel for funktionen $\underline{\mu}_n$ givet ved $\sum \underline{\mu}_n x^n = (\sum \log p\ x^p)^2$. Da zetafunktionen til $\sum \log p\ x^p$ er $-Z'_p(s)$ og da $-Z'_p{}^{h/k}(s)$ har principal pol i s = 1 med residuum $\mu(k)/\phi(k)$, er for $x = e(h/k)e^{-y}$

$$\sum \log p\ x^p = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, (-Z'_p{}^{h/k}(s))\, ds = \mu(k)/\phi(k)\, y^{-1} + \text{restled}.$$

Heraf følger at

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, Z^{h/k}{}_{\underline{\mu}}(s)\, ds = (\mu(k)/\phi(k)\, y^{-1})^2 + \text{restled}$$

og af formlen for c_n får vi derfor

$$\underline{\mu}_n = \iota(n)\, n + \text{restled}$$

hvor $\iota(n) = \sum\sum e(-h/k)^n (\mu(k)/\phi(k))^2$ ($k \geq 1$ og h = 1, 2, ..., k - 1, h primisk med k, h = 0 for k = 1). Vi skal altså udregne

$$\iota(n) = \sum A_k \ (k \geq 1)$$

hvor

$$A_k = (\sum e(-h/k)^n)(\mu(k)/\phi(k))^2$$

- sum over h = 1, ..., k - 1, h primisk med k, h = 0 for k = 1. Da $A_{k'k''} = A_{k'}A_{k''}$ for (k', k'') = 1 og $A_p{}^r = 0$ for p primtal og r > 0, er

$$\iota(n) = \prod (1 + A_p) \text{ (p primtal).}$$

Men $A_p = -1/(p - 1)^2$ hvis p ikke er divisor i n og $A_p = 1/(p - 1)$ hvis p er divisor i n, derfor er ι(n) = 0 for n ulige og for n lige har vi

$$\underline{\mu}_n = 2E_0E\ n + \text{restled}$$

hvor

$$E_0 = \prod (1 - 1/(p - 1)^2) \text{ (p ulige primtal)} = 0.6601618...$$

og

$$E = \prod (p - 1)/(p - 2) \text{ (p ulige primdivisor i n).}$$

For n omkring 4.000.000 ligger forholdet imellem $\underline{\mu}_n$ og tilnærmelsen i intervallet]0.99, 1.003[.

Man kan få en tilnærmelsesformel for μ_n ved blot at dividere med $\log(n)^2$:

$$\mu_n \approx 2E_0E\ n/\log(n)^2.$$

Denne formel blev første gang postuleret af Sylvester i 1871 (ved et statistisk argument, og formlen var ikke helt korrekt), og den er ikke særlig god. Ønskes en bedre, må -$Z'_p(s)$ som er zetafunktionen til $\sum \log p\ x^p$ erstattes med $Z_p(s)$ som er zetafunktionen til $\sum x^p$, og da denne er ikke-meromorf men med meromorf afledet, bør der anvendes partiel integration som i § .... Så skal $(\mu(k)/\phi(k))^2\ y^{-2}$ erstattes med

$$(\mu(k)/\phi(k))^2 \left(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\ \Gamma(t)\ dt\right)^2$$

og i denne skal man indføre integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$, altså udregne

$$1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny} \left(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\ \Gamma(t)\ dt\right)^2 dy.$$

Hvis $\int y^{-t}\Gamma(t)\ dt$ approksimeres med en endelig sum, og man kvadrerer denne og indfører integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$ samt tager grænseværdien, fås

$$\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1} n^{x+y-1}\ B(x, y)\ dxdy$$

hvor $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ er betafunktionen. Og benyttes at

$$B(x, y) = \int_{0}^{\infty} t^x/(1 + t)^{x+y}\ dt/t$$

fås

$$1/(2\pi i)\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny}\left(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\,\Gamma(t)\,dt\right)^2 dy = \int_{0}^{n} dt/(\log(t)\log(n-t)) = 2\int_{0}^{n/2} dt/(\log(n/2+t)\log(n/2-t)).$$

Altså er

$$\mu_n = 4E_0E\int_{0}^{n/2} dt/(\log(n/2+t)\log(n/2-t)) + \text{restled.}$$

For n omkring 2.000.000 ligger forholdet imellem μ_n og tilnærmelsen i intervallet]0.99, 1.008[.

Den dårlige tilnærmelse $\mu_n \approx 2E_0E\ n/\log(n)^2$ kan forbedres betydeligt, hvis vi gør ligesom for b_n i §10: erstatter n/log(n) med π_n, det vil sige, erstatter $n/\log(n)^2$ med π_n^2 / n For n omkring 2.000.000 ligger forholdet imellem μ_n og $2E_0E\ \pi_n^2$ /n i intervallet]0.99, 1.007[.

Da $\iota(n) > 0$ (for n lige) er det at bevise Goldbachs formodning ensbetydende med at bevise at restleddet i disse formler er forsvindende i forhold til det principale led. I Hardy og Littlewoods afhandling [4], som vores fremgangsmåde er hentet fra, er formlen udledt i det generelle tilfælde hvor $\mu^r{}_n$ $(r \geq 2)$ er antallet af (ordnede) opspaltninger $n = p_1 + p_2 + ... + p_r$ i r ulige primtal. $\mu^r{}_n$ er altså givet ved $\sum \mu^r{}_n x^n = (\sum x^p)^r$. Det er dog $\underline{\mu}^r{}_n$ - givet ved $\sum \underline{\mu}^r{}_n x^n = (\sum \text{lop } x^p)^r$ - der undersøges, og formlen for $\underline{\mu}^r{}_n$ lyder

$$\underline{\mu}^r{}_n = 2E^r{}_0E^r\ n^{r-1}/(r-1)! + \text{restled}$$

hvor

$$E^r{}_0 = \prod (1 - (-1)^r/(p-1)^r) \text{ (p ulige primtal)}$$

og

$$E^r = \prod ((p-1)^r + (-1)^r(p-1))/((p-1)^r - (-1)^r) \text{ (p ulige primdivisor i n).}$$

Hardy og Littlewood foretager en vurdering af restleddet. Af denne fremgår at hvis det for zetafunktionerne $L_r(s)$ gælder at der findes et tal $\Theta < 3/4$ således at $\mathrm{Re}(s) \leq \Theta$ for ethvert nulpunkt s (altså en mildere udgave af Riemanns hypotese), da er restleddet af mindre størrelsesorden end $n^{r-1-(3/4-\theta)}\log(n)^B$ og derfor forsvindende i forhold til det principale led. Men dette gælder kun for r > 2 - hvorfor argumentet i vurderingen svigter i tilfældet r = 2 forklares i § ....

Hardy og Littlewood beviste altså at under forudsætning af en mild Riemann hypotese, gælder for et givet r > 2 at ethvert tilstrækkelig stort tal n (lige hvis r er lige og ulige hvis r er ulige) kan skrives som en sum af r ulige primtal. Dette resultat har mindre dybde end tilfældet r = 2, og det kan da også bevises, idet den milde Riemann hypotese kan undværes, se § ....

Formlen for μ_n kan generaliseres til det tilfælde hvor vi har givet et (lille) primtal p' og det gælder om at finde antallet ${}^{p'}\mu_n$ af opspaltninger af n af formen n = p + p'q (p og q primtal). For $p' \neq 2$ er ${}^{p'}\mu_n = 0$ hvis n er ulige eller hvis p' går op i n, i modsat fald er

$$ {}^{p'}\mu_n \approx (4/p')(p' - 1)/(p' - 2)E_0E \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)). $$

For p' = 2 er ${}^{p'}\mu_n = 0$ for n lige og for n ulige er

$$ {}^{p'}\mu_n \approx 2E_0E \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)). $$

13 Formel for a_n

Funktionen $\underline{a}_n$ er givet ved $\sum \underline{a}_n x^n = (\sum \log p\ x^p)(\sum \underline{\sigma}_j x^j)$. For $x = e(h/k)e^{-y}$ er

$$ \sum \log p\ x^p = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\ \Gamma(s)\ (-Z'^{h/k}_p(s))\ ds = \mu(k)/\phi(k)\ y^{-1} + \text{restled} $$

og

$$ \sum \underline{\sigma}_j x^j = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\ \Gamma(s)\ Z^{h/k}_{\underline{\sigma}}(s)\ ds = \mu(k)/k\ \zeta(2)\ y^{-2} + \text{restled} $$

derfor er

$$ 1/(2\pi i) \int y^{-s}\ \Gamma(s)\ Z^{h/k}_{\underline{a}}(s)\ ds = \mu(k)^2/(k\phi(k))\ \zeta(2)\ y^{-3} + \text{restled} $$

og af formlen for c_n får vi (da $\Gamma(3) = 2$) at

$$ \underline{a}_n = \iota^a(n)\ \zeta(2)/2\ n^2 + \text{restled} $$

hvor $\iota^a(n) = \sum e(-h/k)^n\ \mu(k)^2/(k\phi(k))$ ($k \geq 1$ og h = 1, 2, ..., k - 1, h primisk med k, h = 0 for k = 1). Vi skal altså udregne

$$ \iota^a(n) = \sum_{k\ \text{ulige}} ((\sum e(-h/k)^n)\ \mu(k)^2/(k\phi(k)) + (\sum e(-h/(2k))^n)\ \mu(k)^2/(2k\phi(k))) $$

da $\mu(k) = 0$ hvis k er delelig med 4, og da $\sum e(-h/(2k))^n = (-1)^n \sum e(-h/k)^n$ bliver dette

$$ = (1 + (-1)^n/2) \sum B_k \text{ (k ulige)} $$

hvor $B_k = (\sum e(-h/k)^n)\ \mu(k)^2/(k\phi(k))$ (sum over h = 1, ..., k - 1, h primisk med k, h = 0 for k = 1). Da $B_{k'k''} = B_{k'}B_{k''}$ for (k', k'') = 1 og $B_{p^r} = 0$ for p primtal og r > 1, er

$$ \kappa^a(n) = (1 + (-1)^n/2) \prod (1 + B_p) \text{ (produkt over de ulige primtal).} $$

Men $B_p = -1/(p(p - 1))$ hvis p ikke er divisor i n og $B_p = 1/p$ hvis p er divisor i n, derfor er

$$ \underline{a}_n = (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)/2\ E^a{}_0 E^a\ n^2 + \text{restled} $$

hvor

$$ E^a{}_0 = \prod (1 - 1/(p(p - 1))) \text{ (p ulige primtal)} = 0{,}7479... $$

og

$$ E^a = \prod (p^2 - 1)/(p^2 - p - 1) \text{ (p ulige primdivisorer i n).} $$

For n omkring 50.000 ligger forholdet imellem $\underline{a}_n$ og tilnærmelsen i intervallet]0.95, 1.02[.

For a_n har vi denne (dårlige) tilnærmelse

$$a_n \approx (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)/2\ E^a{}_0E^a\ n^2/(\log n)^2.$$

Som med b_n (sidst i § ...) kan denne forbedres betydeligt hvis n/log n erstattes med π_n. For n omkring 50.000 ligger forholdet imellem a_n og tilnærmelsen i så fald i intervallet]0.99, 1.08[. Vi kan også få en betydeligt forbedret tilnærmelse ved at anvende samme metode som for μ_n:

$$a_n \approx (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)\ E^a{}_0E^a\ n \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)).$$

For n omkring 50.000 ligger forholdet imellem a_n og denne tilnærmelse i intervallet]0.99, 1.07[.

Da $\sum$ log p (p primtal < n) = $\theta_n \approx$ n (§ ...), kommer formodningen for $\underline{a}_n$ (i indledningen) til at lyde:

$$\underline{b}_n < \underline{a}_n \quad \text{for n lige}$$

- og tilstrækkelig stor. Da $\underline{b}_n \approx \zeta(2)/2\ n^2$ betyder dette at vi have $E^a{}_0E^a > 2/3$, og denne ulighed er altid opfyldt da $E^a{}_0E^a > 0{,}747$, så formodningen synes at være sand.

14 Chens sætning og en generalisering

I 1966 beviste Chen Jing Run at ethvert tilstrækkelig stort lige tal kan skrives som en sum af et primtal og et tal der enten er et primtal eller et produkt af to primtal. Ved hjælp af den såkaldte sigtemetode (§ ...) beviste han at antallet af disse opspaltinger af n er større end $0{,}098 \cdot E_0E\ n/(\log n)^2$ (E_0 og E som i § ...) - han opstillede altså ikke en formel for antallet og beviste at restleddet i denne er forsvindende. I 1973 udgav han et bevis hvor tallet 0,098 er hævet til 0,67.

Da Chens antal ${}^2\mu_n$ er større end Goldbachs antal μ_n, og da Goldbachs antal opfylder $\pi_n/n < \mu_n/\pi_n$, vil Chens antal nok opfylde en tilsvarende ulighed $\pi_n/n < {}^2\mu_n/{}^2\pi_n$, hvor ${}^2\pi_n$ er antallet af tal < n som enten er et primtal eller et produkt af to primtal.

Lad ${}^rp_n$ være 1 hvis antallet af primfaktorer i n med multiplicitet ≤ r og ellers 0. Da er ${}^1p_n = 1$ hvis n er et primtal og ellers 0, og ${}^2p_n = 1$ hvis n er et primtal eller n = pq (primtal) og ellers 0. Og da $\sum x^p = \sum {}^1p_n x^n$, kan $\sum \pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum x^p)$ generaliseres til $\sum {}^r\pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum {}^rp_n x^n)$, så ${}^r\pi_n$ er antallet af tal < n som har højst r primfaktorer. Og $\sum \mu_n x^n = (\sum x^p)(\sum x^p)$ kan generaliseres til $\sum {}^r\mu_n x^n = (\sum x^p)(\sum {}^rp_n x^n)$, så ${}^r\mu_n$ er antallet opspaltninger af n = p + q således at p et er primtal og q højst har r primfaktorer. Vi formoder at uligheden

$$\pi_n/n < {}^r\mu_n/{}^r\pi_n$$

gælder for alle r - for n tilstrækkelig stor. Bemærk at ${}^r\pi_n \to n$ og ${}^r\mu_n \to \pi_n$ for $r \to \infty$.

Tilsvarende kan funktionerne b_n og a_n generaliseres. Lad ${}^r\sigma_n$ være σ_n hvis antallet af primfaktorer i n med multiplicitet $\leq r$ og ellers 0. Da er ${}^1\sigma_n = n$ hvis n er et primtal og ellers 0, og ${}^2\sigma_n = n$ hvis n er et primtal og $= p + q$ hvis $n = pq$ (primtal) og ellers 0. Det er klart at ${}^r\sigma_n \to \sigma_n$ for $r \to \infty$. b_n og a_n er givet ved henh. $\sum b_n x^n = (\sum x^n)(\sum \sigma_n x^n)$ og $\sum a_n x^n = (\sum x^p)(\sum \sigma_n x^n)$, så generaliseringen må være givet ved

$$\sum {}^rb_n x^n = (\sum x^n)(\sum {}^r\sigma_n x^n)$$

og

$$\sum {}^ra_n x^n = (\sum x^p)(\sum {}^r\sigma_n x^n)$$

- altså ${}^rb_n = \sum {}^r\sigma_i$ ($i < n$) og ${}^ra_n = \sum {}^r\sigma_{n-p}$ (p primtal $< n$). Da ${}^rb_n \to b_n$ og ${}^ra_n \to a_n$ for $r \to \infty$, må vi formode at vores formodning $\pi_n/n < a_n/b_n$ kan generaliseres til

$$\pi_n/n < {}^ra_n/{}^rb_n.$$

Denne sammenlignes med

$$\pi_n/n < {}^r\mu_n/{}^r\pi_n.$$

Vi har altså at for $r \to \infty$ gælder ${}^r\mu_n/{}^r\pi_n \to \pi_n/n$ og ${}^ra_n/{}^rb_n \to a_n/b_n$. For små r-værdier svinger ${}^r\mu_n/{}^r\pi_n$ stærkt med n, men flader ud og nærmer sig langsomt til π_n/n som er næsten konstant. For alle r er $a_n/b_n < {}^ra_n/{}^rb_n$ og tallene ${}^ra_n/{}^rb_n$ aftager jævnt i størrelse, og for r = 1 og r = 2 afviger ${}^ra_n/{}^rb_n$ meget fra a_n/b_n, men allerede ${}^3a_n/{}^3b_n$ er tæt på a_n/b_n. Også tallene ${}^r\mu_n/{}^r\pi_n$ synes at aftage jævnt, men man skal op på meget store n.værdier. Der synes altså at gælde:

$$a_n/b_n < {}^ra_n/{}^rb_n < {}^2a_n/{}^2b_n < {}^1a_n/{}^1b_n$$

og

$$\pi_n/n < {}^r\mu_n/{}^r\pi_n < {}^2\mu_n/{}^2\pi_n < \mu_n/\pi_n$$

for n tilstrækkelig stor. ${}^1\mu_n/{}^1\pi_n$ ($= \mu_n/\pi_n$) er det største af tallene ${}^r\mu_n/{}^r\pi_n$ og ${}^1a_n/{}^1b_n$ er det største af tallene ${}^ra_n/{}^rb_n$, men man kan ikke bevise at disse største tal er større end 0.

15 Baggrund for formodningen $b_n/n < a_n/\pi_n$

Formodningen $b_n/n < a_n/\pi_n$ (for n lige) stammer fra følgende betragtning, som har forbindelse til Goldbachs formodning. For det lige tal 2n lyder en let variant af formodningen således: a_n, som er $\sum \sigma_{n-p}$ (p primtal $< n$), erstattes med $\sum \sigma_{2n-p}$ (p primtal $> n$ og $< 2n$) og π_n erstattes med antallet af primtal i intervallet]n, 2n[, men dette antal nærmer sig asymptotisk til π_n. Hvis vi sætter

$$D = (2/n) \sum \sigma_{2n-p} \text{ (p primtal > n og < 2n)}$$

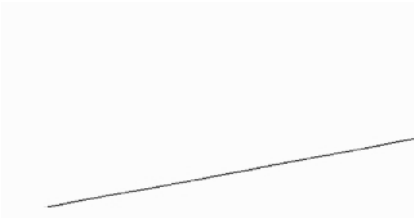
og

$$S = 2\#\{\text{primtal p i }]n, 2n[\}(\sum \sigma_i \ (i < n))/n^2$$

kommer varianten til at lyde: $S < D$.

For alle n er $\sigma_n \leq n$ og der gælder kun lighed når n er et primtal. Hvis tallet $q - \sigma_q$ er lille - mindre end et givet tal - vil vi kalde q et næsten-primtal mht. det givne tal. Antallet af primtal $p < n$ således at $q = 2n - p$ er et næsten-primtal mht. n ($q - \sigma_q < n$) består af to dele: de p hvor q er et primtal og de p hvor q ikke er et primtal. Det første antal er Goldbachs antal - altså antallet af opspaltninger af 2n i summen af to primtal - og dette betegnes her μ_n (i stedet for μ_{2n}). Det andet antal betegnes μ^*_n.

Hvis p + q er en opspaltning af 2n i to primtal, er $\sigma_p + \sigma_q = 2n$. Hvis p + q er en opspaltning af 2n i to tal således at $n < \sigma_p + \sigma_q < 2n$, er enten p eller q men ikke begge et primtal. For disse opspaltninger ligger tallene $(\sigma_p + \sigma_q)/n$ imellem 1 og 2, men hvis de ordnes efter størrelse, ligger de næsten på en ret linie (den skrå linie):



Dette betyder at hvis intervallet]1, 2[deles i lige store dele, vil der i hver del ligge næsten lige mange af tallene $(\sigma_p + \sigma_q)/n$. Tallene ligger under den rette linie, så deres middelværdi er mindre end 3/2. Denne ulighed kan omskrives til

$$D + Z < \mu_n + \mu^*_n$$

hvor Z er forsvindende i forhold til de øvrige tal (Z er differencen imellem to tal hvor det ene er 0 hvis det gennemsnitlige primtal imellem n og 2n har middelværdien af disse to tal, og hvor det andet er 0 hvis det gennemsnitlige tal $\sigma_p + \sigma_q$ der bidrager til μ^*_n har værdien n). Endvidere synes at gælde at $\mu^*_n < S$, således at der ialt synes at gælde:

$$\mu^*_n < S < D < \mu_n + \mu^*_n.$$

For n omkring 20000 ser tallene således ud:

n	μ^*_n	S	D	$\mu_n + \mu^*_n$
20000	197	365	514	586
20001	99	365	644	692
20002	174	365	416	479
20003	187	365	404	476
20004	87	365	629	641
20005	186	365	511	572

20006	172	365	486	536
20007	93	365	746	780
20008	178	365	443	496
20009	202	365	477	550
20010	58	365	867	893

Af de tre uligheder følger Goldbachs formodning: $\mu_n > 0$. Den første ulighed synes at kunne bevises ved Chens metode, den anden, som er ensbetydende med $b_n/n < a_n/\pi_n$, kan måske også bevises. De primtal $p < n$ som bidrager til $\mu_n + \mu^*_n$ kan begrænses til dem hvor $q = 2n - p$ har højst to primfaktorer, da bidragene fra resten er meget lille i forhold.

16 En variant af metoden

Lad $\sum a_i x^i$ og $\sum b_j x^j$ være to potensrækker som opfylder betingelserne i § …, lad $k \varepsilon Z$ og $r \varepsilon\ ]0, 1[$. Da er

$$1/(2\pi i) \int_C (\sum a_i r^i x^i)(\sum b_j r^j x^j)^c x^k\, dx/x = r^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} b_n\, r^{2n}$$

hvor C er en lille cirkel om 0. Man kan udregne integralet ved anvendelse af fremgangmåden i § …. Man sætter $x = e^{-y}$ og $r = e^{-1/N}$ og benytter at

$$\sum a_i r^i x^i = 1/(2\pi i) \int (y + 1/N)^{-s}\, \Gamma(s)\, Z_a(s)\, ds$$

og tilsvarende for $\sum b_j r^j x^j$, samt

$$1/(2\pi i) \int_{-\infty i}^{\infty i} (1/N + y)^{-\alpha}(1/N + y^c)^{-\beta}\, dy = (N/2)^{\alpha+\beta-1}/(B(\alpha, \beta)(\alpha + \beta - 1))$$

- i stedet for $1/(2\pi i) \int e^{ny}\, y^{-s}\, dy = n^{s-1}/\Gamma(s)$.

Herefter benyttes følgende "Tauberiske sætning" som skyldes Hardy & Littlewood og hvis omvending for $\alpha = \beta = 0$ er Abels sætning:

Lad $\sum a_n r^n$ være en potensrække med positive led og konvergensradius ≥ 1 og antag at

$$\sum a_n r^n \approx A(1/(1 - r))^{\alpha}(\log(1/(1 - r))^{\beta} \quad \text{for } r \to 1$$

hvor $\alpha \geq 0$ og $\beta > 0$ hvis $\alpha = 0$, da gælder

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \approx AN^{\alpha}(\log N)^{\beta}/\Gamma(\alpha + 1) \quad \text{for } N \to \infty.$$

Hvis udregningen af integralet langs C er af formen $A(1/(1 - r^2))^{\alpha}(\log(1/(1 - r^2))^{\beta}$ ($\approx A(N/2)^{\alpha}(\log(N/2)^{\beta})$ + rest, da følger af Hardy & Littlewoods sætning at

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n+k} b_n \approx AN^{\alpha}(\log N)^{\beta}/\Gamma(\alpha + 1) \quad \text{for } N \to \infty$$

da $r^k \to 1$. I sådanne resultater skal det selvfølgelig bevises at restleddet er forsvindende - i de følgende eksempler er dette ikke blevet bevist!

Eksempler

1. For $\sum a_i x^i = \sum b_j x^j = \sum \log p\, x^p$ får vi for k lige:

$$\sum_{p \text{ primtal}<N,\ p+k \text{ primtal}} \log(p+k) \log p \approx 2\, E_0 E\, N \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

- E_0 og E som i § 14, E mht. k. For $\sum a_i x^i = \sum b_j x^j = \sum x^p$ skal vi anvende fremgangsmåden i § ... og generaliserer Hardy & Littlewoods sætning en smule. Resultatet kan formuleres:

$$\text{antallet af par af primtal hvis differens er k er} \approx 2\, E_0 E \int_0^N dt/(\log t)^2.$$

For k lige er det altså uendelig mange primtal således at p + k også er et primtal - bemærk at antallet afhænger af k's opspaltning i primfaktorer ganske som i antallet af opspaltninger af k i summen af to primtal. For k = 2 (eller en potens af 2) har vi

$$\text{antallet af primtalstvillinger} < N \approx 1{,}32 \int_0^N dt/(\log t)^2$$

- for $N = 10^6$ er antallet 8164 og tilnærmelsen 8246. Primtalstvillingerne ligger dog ikke særlig tæt: rækken $\sum (1/p + 1/(p+2))$ (sum over alle primtalstvillingerne) er nemlig konvergent (Viggo Brun, 1919).

2. For $\sum a_i x^i = \sum \log p\, x^p$ og $\sum b_j x^j = \sum x^{m^2}$ og k = -1 fås

$$\sum_{m^2+1 \text{ primtal}<N} \log(m^2+1) \approx C \sqrt{N}$$

hvor

$$C = \prod (1 - ((-1/p))/(p-1)) \text{ (p ulige primtal)} = 1{,}37$$

og hvor $((-1/p))$ er 1 hvis -1 (mod p) er et kvadrattal og ellers -1. For $\sum a_i x^i = \sum x^p$ fås

$$\text{antallet af primtal p mindre end N af formen } m^2 + 1 \approx C/2 \operatorname{Li}(\sqrt{N})$$

- for $N = 10^8$ er antallet 840 og tilnærmelsen 854.

17 Vinogradovs bevis for at $\mu^3_n > 0$

Hardy & Littlewood generaliserede tilnærmelsesformelen for μ_n til μ^r_n ($r \geq 2$) (antallet af måder hvorpå tallet n kan skrives som summen af netop r ulige primtal), og for r > 2 beviste de at restleddet er forsvindende i forhold til det principal led under forudsætning af en mildere version af Riemanns hypotese for visse zetafunktioner. Men strengt taget havde man altså endnu ikke bevist at for selv et nok så stort tal r, kan ethvert tilstrækkelig stort tal n (lige eller ulige alt eftersom r er lige eller ulige) skrives som summen af r ulige primtal - og dette måtte da kunne gøres uden ubeviste antagelser.

I 1937 forsøgte Vinogradov sig med en variant af Hardy & Littelewoods cirkelmetode, og denne metode afslørede at man i stedet for den ubeviste Riemann hypotese kan nøjes med en umiddelbart forinden bevist sætning om primtallenes fordeling, nemlig Siegel-Walfisz' sætning (§ ...), så hermed var Hardy & Littlewoods resultat komplet bevist.

Lad os skitserer Vinogradovs bevis. Vi definerer funktionen $F:[0, 1] \to C$ ved

$$F(x) = \sum e(xp) \text{ (p ulige primtal } \leq n).$$

Da

$$\int_0^1 e(xk)\, dx = 1 \text{ for } k = 0 \text{ og } 0 \text{ for } k \neq 0$$

er

$$\mu^3_n = \int_0^1 F(x)^3 e(-xn)\, dx.$$

Intervallet [0, 1] deles nu op i to dele som hver er foreningen af endelig mange intervaller - "store buer" og "små buer": Hvis vi sætter $\tau = (\log n)^{B'}/n$ og $Q = (\log n)^{B''}$, hvor B' og B" er reelle tal der skal vælges således at de nedenfor optrædende tal A' og A" får de ønskede værdier, da er de store buer foreningen af intervallerne

$$[h/k - \tau, h/k + \tau] \quad (k = 1, ..., [Q], h = 1, ..., k - 1, h \text{ primisk med } k, h = 0 \text{ for } k = 1)$$

(som er disjunkte når n er tilstrækkelig stor). Af Siegel-Walfisz' sætning følger at indenfor den store bue indeholdende h/k, altså for $|\varepsilon| < \tau$, gælder

$$F(h/k + \varepsilon) = \mu(k)/\phi(k) \sum_{i=2}^{n-1} e(\varepsilon i)/\log i + O(n/e^{A\sqrt{\log n}})$$

hvor A er bestemt ved B". Indsættes dette udtryk for $F(h/k + \varepsilon)$ i formlen for μ^3_n og integreres over de store buer fås

$$1/2\ E^3{}_0 E^3\ n^2/(\log n)^3 + O(n^2/(\log n)^{A'})$$

hvor vi ved passende valg af B' og B" kan opnå at A' ≥ 4. Tilbage er en vurdering af F(x) på de små buer. Det siger at hvis man tildeler B' og B" passende værdier, kan man opnå at F(x) her er af mindre størrelsesorden end $n/(\log n)^{A''}$, hvor A" ≥ 3. Dette betyder at de små buers bidrag til μ^3_n er af mindre størrelsesorden end

$$n/(\log n)^{A''} \int_0^1 |F(x)|^2\, dx$$

og her er integralet af mindre størrelsesorden end n/(log n). Restleddet i formlen for μ^3_n er altså af mindre størrelsesorden end $n^2/(\log n)^4$.

18 Andre metoder til at "bevise" Goldbachs formodning

Som vi har demonstreret, er den komplekse funktionsteori et uundværligt redskab i teorien for primtallene. Ved hjælp af kompleks funktionsteori kan man udlede formler, men i formlerne er ofte et restled som det kan være svært at vurdere størrelsen af. For at opnå håndgribelige resultater har man forsøgt sig man andre metoder til tackle problemer der er beslægtet med Goldbachs formodning. De to vigtigste er i modsætning til den funktionsteoretiske metode elementære.

1. *Sigtemetoden* har sit udgangspunkt i Eratosthenes' (250 f.Kr.) metode til at opskrive alle primtallene mellem $\sqrt{n}$ og n: først fjernes de tal der er delelige med 2, så fjernes de tal der er delelige med 3, og så videre, dette gøres for alle primtallene op til $\sqrt{n}$.

Lad for en delmængde A af IN og r ε IN, F(A, r) være antallet af tal i A som er tilbage efter en sådan bortsigtning for primtallene op til r, altså som ikke er deleligt med noget primtal < r (ofte er det mest hensigtsmæssigt at fjerne restklasser fra A: for et primtal p og for et (relativt stort) antal tal h < p, fjernes tallene h + kp (k = 1, 2, ...) fra A).

Hvis $A_n = \{i(n - i) \mid i = 1, 2, ..., n - 1\}$ sætter vi $F(n, r) = F(A_n, r)$, altså antallet af tal af formen i(n - i) der ikke har primfaktorer < r. Hvis man kan bevise at der findes et n_0 således at $F(n, n^{1/3}) > 0$ for alle lige $n > n_0$, er Goldbachs formodning bevist, thi dette betyder at for et sådant lige n findes et i < n således at alle primdivisorerne i i(n - i) er større end $n^{1/3}$, følgelig kan (da n er lige) i(n - i) kun have to primfaktorer, og derfor er i og n - i er primtal. For k = 3, 4, ... betyder $F(n, n^{1/(k+1)}) > 0$ tilsvarende at n er summen af to tal der højst har k primfaktorer. Viggo Brun introducerede i 1919 en sigtemetode, og ved hjælp af denne viste han at $F(n, n^{1/10)}) > 0,2\, n/(\log n)^2$ for n tilstrækkelig stort, dette betyder at ethvert tilstrækkelig stort lige tal er summen af to tal der hver har højst 9 primfaktorer.

Atle Selberg angav i 1947 (i en afhandling på 4 sider) en genial forbedring af Bruns metode. Den bygger på den observation at hvis man til ethvert at tallene i = 1, ..., r knytter et reelt tal λ_i, hvor blot $\lambda_1 = 1$, da er

$$F(A, r) \leq \sum_{a} \Big(\sum_{i|a} \lambda_i\Big)^2 = \sum \lambda_{i1}\lambda_{i2}\ \#\{a \in A \mid (i_1 i_2/\mathrm{mfd}(i_1, i_2))|a\}.$$

Det gælder nu om at vælge λ_i således at højre side er mindst mulig. Lad |A| være antallet af elementer i A og antag at der findes en multiplikativ funktion f(i) (altså $f(i_1 i_2) = f(i_1)f(i_2)$, for i_1 og i_2 primiske) således at for i ≤ r er

$$\#\{a \in A \mid i|a\} = |A|/f(i) + \text{rest}$$

da er minimumsværdien af $\sum (\sum \lambda_i)^2$ givet ved $|A|/(\sum |\mu(i)|/f^*(i)\ (i \leq r))$, hvor $f^*(i) = \sum \mu(d)\, f(i/d)$ (sum over i's divisorer), altså er F(A, r) ≤ denne størrelse.

Her skal man selvfølgelig sikre sig at resten er ubetydelig. Selberg anvender metoden på et enkelt eksempel: han viser at antallet af primtalstvillinger mindre end n er mindre end $10{,}6\, n/(\log n)^2$ for n tilstrækkelig stort (sæt $A = \{i(i + 2) \mid i \leq n\}$ og $r = n^{1/2-\varepsilon}$) - vores formel i § ... (hvor restleddet i modsætning til disse resultater ikke "kan" bevises at være forsvindende) siger at antallet $\approx 1{,}32\, n/(\log n)^2$.

Selbergs formel blev videreudviklet af andre. For at kunne estimere F(A, r) bedre har man betjent sig af iterativ anvendelse af relationer der sammenknytter F(A, r) for forskellige r-værdier. Prototypen er følgende identitet og ulighed: Hvis F(A, p, r) er antallet af tal i A som er delelige med p og som ikke er deleligt med noget primtal < r, da er for r' > r

$$F(A, r') = F(A, r) - \sum_{r \le p < r'} F(A, p, p),$$

og hvis F(A, b, r, r') er antallet af tal i A som ikke er delelige med primtal p < r og som er delelige med højst b primtal p således at r ≤ p < r', da er

$$F(A, b, r, r') \ge F(A, r) - \Big(\sum_{r \le p < r'} F(A, p, r)\Big)/(b + 1)$$

Ved hjælp af sådanne vurderinger af F(A, r) har man i årendes løb forbedret Bruns resultat. Det bedste resultat indtil nu skyldes Chen, der som sagt i 1966 beviste at ethvert tilstrækkelig stort lige tal er summen af et primtal og et tal der højst har to primfaktorer. Vi vil skitsere Chens bevis:

Lad $P_{(1,2)}(n)$ være antallet af opspaltninger af n af formen n = p + m hvor m har højst to primfaktorer. Idet $A_n = \{n - p \mid p \text{ primtal} < n\}$ sæt $P(n, r) = F(A_n, r)$ (altså antallet opspaltninger n = p + m hvor intet primtal < r går op i m) og $P(n, p, r) = F(A_n, p, r)$ (altså antallet af opspaltninger n = q + m hvor p går op i m men intet primtal < r), og lad $\Xi(n)$ være antallet af opspaltninger af n af formen $n = p_1p_2p_3 + m$, hvor $n^{1/10} < p_1 \le n^{1/3} < p_2 \le (n/p_1)^{1/2}$ og hvor hver primfaktor i m er større end $n^{1/4}$.

Det er indlysende, mener Chen, at

$$P_{(1,2)}(n) \ge P(n, n^{1/10}) - \Big(\sum_{n^{1/10} < p \le n^{1/3}} P(n, p, n^{1/10})\Big)/2 - \Xi(n)/2 + O(n^{9/10}).$$

Ved hjælp af Bombieris middelværdisætning (§ ...) og estimationer af de ovennævnte typer viser Chen at for n tilstrækkelig stor er de to første led ≥ 2,6408 $E_0E\, n/(\log n)^2$, og af Bombieris middelværdisætning følger at for n tilstrækkelig stor er $\Xi(n) \le 3{,}9404\, E_0E\, n/(\log n)^2$. Af disse tre uligheder følger at

$$P_{(1,2)}(n) \ge 0{,}67\, E_0E\, n/(\log n)^2.$$

2. *Tæthedsmetoden* bygger på følgende enkle teori som skyldes Schnirelman. Hvis A er en uendelig delmængde af IN_0, defineres tætheden af A som $\alpha = \inf_n(\#\{i \mid i \in A, i \le n\} / n)$. Hvis $\alpha = 1$ er $A = N_0$. Da gælder følgende regler, hvis A og B har tæthed α og β, og $C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ har tæthed χ:

1. $0 \in A$, $1 \in B \Rightarrow \chi \ge \alpha + \beta - \alpha\beta$,

2. $0 \in A$, $1 \in B$, $\alpha + \beta \ge 1 \Rightarrow \chi = 1$, det vil sige $C = IN_0$.

Heraf følger

3. $0 \in A$, $\alpha > 0 \Rightarrow$ der findes et $s \in IN$ således at $sA = IN_0$.

1. kan forfines til: $\chi \ge \alpha + \beta$ (Mann, 1942).

Lad nu A være $\{i \varepsilon IN_0 \mid i = 0$ eller $i = 1$ eller der findes primtal p og q således at $i = p + q\}$. Det følger af Schwarz ulighed at $(\sum \mu_i)^2 \leq n\sum \mu_i^2$ (sum over $i \leq n$), altså er for ethvert n

$$\alpha \geq (\sum \mu_i)^2/(n\sum \mu_i^2) \ (i \leq n).$$

Ved hjælp af Bruns eller Selbergs metoder kan man se at der findes et C_1 således at for ethvert n og for $i \leq n$ er

$$\mu_i < C_1 \ (\sum_{d|i \text{ d kvadratfri}} 1/d) \ i/(\log n)^2$$

og man kan også se at der findes et $C_2 > 0$ således at for ethvert n er

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i > C_2 \ n^2/(\log n)^2$$

(vores metode i § ... viser at $\sum \mu_i \approx 1/2 \ n^2/(\log n)^2$). Af disse to uligheder følger at $\alpha > 0$, og derfor følger af 3 at der findes et s ε IN således at $sA = IN_0$, det vil sige: ethvert naturligt tal er summen af højst 2s primtal.

Anvendes denne metode i sin rå form er tallet s ekstremt stort. Hvis det kun forlanges at ethvert *tilstrækkelig stort* tal kan skrives som summen af højst 2s primtal kan s reduceres til 400.000. Men i årenes løb er s naturligvis blevet reduceret ved forfining af metoden. De bedste resultater indtil nu lyder: *ethvert* tal kan skrives som summen af højst 19 primtal (Riesel & Vaughen, 1983), og ethvert *tilstrækkelig stort* tal kan skrives som summen af højst 6 primtal (Vaughan, 1977) (dette er et svagere resultat end sætningen bevist af Vinogradov som jo siger at s = 4).

19 Hvorfor "beviset" for Goldbachs formodning svigter

Lad os undersøge hvad det er der gør, at beviset (modulo Riemanns hypotese) for at restleddet i formlen for μ^r_n $(r > 2)$ er forsvindende i forhold til det principale led ikke fungerer når $r = 2$.

Vi kigger nærmere på udledningen af udtrykket for $\underline{\mu}_n$ i § .... I Hardy & Littlewoods bevis (for formlen for $\underline{\mu}^r_n$) er der integreret over en cirkel med radius $e^{-1/n}$, og opdelingen af denne er bestemt ved $N = [\sqrt{n}]$. For hvert $k = 1, ..., N$ og $h = 1, ..., k - 1$ (h primisk med k, $h = 0$ for $k = 1$) er punkterne på buestykket indeholdende $e(h/k)e^{-1/n}$ givet ved $e(h/k)e^{-y}$, hvor $y = 1/n + \theta i$ og θ løber fra $-\theta'_{h,k}$ til $\theta_{h,k}$. Vi har $\pi/(kN) \leq \theta_{h,k} < 2\pi/(kN)$, og samme ulighed for $\theta'_{h,k}$. I udregningerne nedenfor er y af formen $y = 1/n + \theta i$ $(\theta \varepsilon IR)$, heraf følger at $|e^{-ny}| = e$. $\sum \log p \ x^p$ udregnet ud fra h/k kan skrives $(-\mu(k)/\phi(k))y^{-1} + \Phi(y)$. Hardy & Littlewood viser at når θ varierer fra $-\theta'_{h,k}$ til $\theta_{h,k}$ er $|\Phi(y)|$ af mindre størrelsesorden end $n^{3/4}\log(n)^B$ (B er her og i det følgende et reelt tal hvis konkrete størrelse er uden betydning og som kan skifte værdi fra formel til formel). Her har vi forudsat at Riemanns hypotese for L-funktionerne $L_r(s)$ $(r = 1, ..., \phi(k))$ i § 12 gælder i sin strengeste form: for ethvert nulpunkt ρ for $L_r(\rho)$ er $Re(\rho) \leq 1/2$ - som sagt behøver vi i det generaliserede tilfælde kun at forudsætte at der findes et tal $\Theta < 3/4$

således at for ethvert nulpunkt ρ for $L_r(s)$ er $\mathrm{Re}(\rho) \leq \Theta$. Da det principale led i formlen for $\underline{\mu}_n$ er af størrelsesorden $n(\log n)^B$, er Goldbachs formodning bevist hvis det kan bevises at restleddet er af mindre størrelsesorden end $n^{1-\varepsilon}(\log n)^B$ for et $\varepsilon > 0$ - dette kan vi umiddelbart kun forvente hvis hver af dets bestanddele er af mindre størrelsesorden end $n^{1-\varepsilon}(\log n)^B$, og det er dette vi vil illustrere er problematisk. Vi sætter $c_k(n) = \sum e(h/k)^n$ (sum over h) og der gælder $c_k(n) = c_k(-n)$.

Restleddene kan opspaltes i fire typer:

1. Fejlen der begås ved at erstatte

$$\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny}/y \, dy$$

med

$$\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/n-\infty i}^{1/n+\infty i} e^{ny}/y \, dy,$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

$$\sum |c_k(n)|(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/(k\sqrt{n})}^{\infty} 1/(1/n^2 + \theta^2) \, d\theta.$$

Da

$$\int_{1/(k\sqrt{n})}^{\infty} 1/(1/n^2 + \theta^2) \, d\theta = n(\pi/2 - \arctan(\sqrt{n}/k)) \approx k\sqrt{n},$$

er det nødvendigt at at vise $\sum |c_k(n)|(\mu(k)/\phi(k))^2 k$ (sum over $k = 1, ..., N = [\sqrt{n}]$) er af mindre størrelsesorden end $n^{1/2-\varepsilon} \log(n)^B$, men umiddelbart kan kun vises at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

2. Fejlen der begås ved at fjerne

$$\sum c_k(n) \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny} \, \Phi(y)^2 \, dy$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

$$|\Phi|^2 \left(\sum |c_k(n)| \int_0^{1/(k\sqrt{n})} d\theta\right) = |\Phi|^2 \, n^{-1/2} \sum |c_k(n)|/k \quad (k = 1, ..., N)$$

altså skal $\sum |c_k(n)|/k$ vises at være af mindre størrelsesorden end $\log(n)^B/n^\varepsilon$, men umiddelbart kan kun vises at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

3. Fejlen der begås ved at fjerne

$$\sum c_k(n)\mu(k)/\phi(k) \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny}\Phi(y)y^{-1} \, dy,$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

∞

$$|\Phi| \sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k) \int_0 (1/n^2 + \theta^2)^{-1/2}\, d\theta < |\Phi| \sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k)$$

altså skal $\sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k)$ vises at være af mindre størrelsesorden end $n^{1/4-\varepsilon}\log(n)^B$, men umiddelbart kan vi kun vise at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

4. Fejlen der begås ved i det principale led at summere k fra 1 til ∞ i stedet for blot fra 1 til N er af mindre størrelsesorden end $n\,|\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2|$ $(k \geq N)$, og om summen her kan vi umiddelbart kun sige at den er af størrelsesorden log n.

I tilfælde 1 og 4 gælder vurderingen lige på grænsen, men i tilfælde 2 og 3, hvor man benytter vurderingen af $\Phi(y)$, ses at denne skal forbedres fra størrelsesorden $n^{3/4}\log(n)^B$ til størrelsesorden $n^{1/2}\log(n)^B$ hvis man også her skal have en vurdering der gælder lige på grænsen.

Lad os se hvorfor vi ikke umiddelbart kan formindske exponenten 3/4 til 1/2. Hvis $x = e(h/k)e^{-y}$ er $\sum \log p\, x^p = (-\mu(k)/\phi(k))y^{-1} + \Phi(y)$, og man skal vurdere $\Phi(y)$ for $y = 1/n + \theta i$. Der gælder

$$\sum \log p\, x^p = \sum_{(n,k)=1} \Lambda_n x^n + f(x)$$

og da det let kan vises at $|f(x)| < Bn^{1/2}\log(n)^{B'}$ på cirklen om 0 med radius $e^{-1/n}$, er det størrelsen af $\sum \Lambda_n x^n = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, Z^{h/k}{}_{\Lambda}(s)\, ds$ der skal undersøges. Da

$$Z^{h/k}{}_{\Lambda}(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \kappa_r(h/k)\, L'_r(s)/L_r(s)$$

hvor $\kappa_r(h/k) = \sum e(h/k)^j \chi_r(j)^{-1}$ $(j \in (Z/kZ)^*)$, kommer de bidrag til $\sum \Lambda_n x^n$ der kan genere fra nulpunkterne ρ for $L_r(s)$ med $\mathrm{Re}(\rho) \geq 0$ og fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$. Vi har antaget at for et nulpunkt ρ er $\mathrm{Re}(\rho) \leq 1/2$, men faktisk kommer selv nulpunkterne for $L_r(s)$ $(r > 1)$ med $\mathrm{Re}(\rho) = 0$ til at volde problemer. Nemlig på følgende måde: For $r > 1$ har $L'_r(s)/L_r(s)$ formen

$$L'_r(s)/L_r(s) = a/s + b + \sum (1/(s - \rho) - 1/\rho) - 1/2\, \Gamma'(s/2 + \alpha)/\Gamma(s/2 + \alpha)$$

hvor $\rho \neq 0$ er nulpunkterne for $L_r(s)$ med $\mathrm{Re}(\rho) \geq 0$ og hvor $\alpha = 0$ eller 1/2. Derfor kommer tallet b til at medvirke til bidraget fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$. Størrelsen af |b| kan findes ved at sætte $s = 1$ i denne ligning. Leddene bortset fra b og $\sum_{\mathrm{Re}(\rho)=0} \ldots$ er af mindre størrelsesorden end $(\log k)^B$ men $\sum_{\mathrm{Re}(\rho)=0} \ldots$ kan kun vises at være af størrelsesorden k log k. Thi et nulpunkt for $L_r(s)$ $(r > 1)$ er nulpunkt for $\prod (1 - \varepsilon_p/p^s)$ (p divisorerne i k), hvor ε_p er en $\phi(k)$-te rod af enheden, derfor kan $|1/\rho|$ være af størrelsesorden k log k. Disse bidrag fra $r = 2, \ldots, \phi(k)$ skal hver ganges med $\kappa_r(h/k)/\phi(k)$ og summeres fra $k = 1$ til $N = [\sqrt{n}]$, og da $|\kappa_r(h/k)| = \sqrt{k}$ (for $r > 1$) kan vi om størrelsesordenen af bidraget til $\sum \Lambda_n x^n$ fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$, ikke umiddelbart sige om den kan vises at være mindre end $n^{3/4}\log(n)^B$.

Da vi jo har et eksakt formeludtryk for restleddet i formlen for $\underline{\mu}_n$, er det store spørgsmål om det kan lade sig gøre at udarbejde en så fin vurdering af dets bestanddele at det kan vises at være af mindre størrelsesorden end n. Ingen har formået dette, man har kastet sig over andre metoder som vist i § 18.

Litteratur

[1] B. Riemann: "Ueber die Anzahl der primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859 (i denne klassiker på 8 sider indføres betegnelsen $\zeta(s)$ for funktionen $\sum 1/n^s = \prod (1-1/p^s)^{-1}$ (som Euler havde studeret), Riemann viser at den har meromorf udvidelse, beviser dens funktionalligning (som Euler kendte men ikke kunne bevise) og opstiller Riemanns hypotese - meningen med det hele er at udlede formlen for π_n).
[2] Edwards, H.M.: "Riemann's Zeta Function", Academic Press, New York, 1974 (omhyggelig gennemgang af Riemanns afhandling, og af senere resultater i teorien, 320 sider).
[3] Titchmarsh, E.C.: "The Theory of the Riemann Zeta Function", Clarendon Oxford, 1953, 1971 (grundig fremstilling af teorien for zetafunktioner, 350 sider).
[4] G.H. Hardy and J.E. Littlewood: "Some problems of 'Partitio Numerorum' III: On the expression of a number as a sum of primes", Acta Mathematica, 44 (1923), 1-70.
[5] I.M. Vinogradow: "Representation of an odd number as a sum of three primes", Doklady Akad. Nauk SSSR, 15 (1937) 291-294.
[6] Chen, J.R.: "On the representation of a large even integer as the sum og a prime and the product of at most two primes, I and II", Sci. Sinica, 16, 1973, 157-176, and 21, 1978, 421-430.
[7] Wang Yuan (ed.): "Goldbach Conjecture", World Scientific, Singapore, 1984 (indeholder 19 af de vigtigste afhandlinger med resultater der har tilknytning til Goldbachs formodning (bl.a. de to overnævnte afhandlinger), samt en introduktion på 18 sider og en litteraturliste på 25 sider).
[8] Pan Chengdong and Pan Chengbiao: "Goldbach Conjecture", Science Press, Beijing, 1992 (beviser for en række tekniske resultater der har tilknytning til Goldbachs formodning, har kun interesse for folk der har ambitioner om at forske i teorien, 240 sider).
[9] Ribenboim, Paulo: "The Little Book of Big Primes", Springer-Verlag, 1991 (spændende bog - opremsning af de vigtigste resultater indenfor primtalsteorien, 230 sider, omfattende kronologisk litteraturliste).