# Pythagoræernes sidste dage i Kroton

## Indledning

I denne beretning skal du høre om hvordan man opdagede at størrelser kan være "inkommensurable".

Athene - kundskabens gudinde - havde længe skammet sig på menneskets vegne over denne uvidenhed. De skulle altså åbenbart hjælpes lidt på vej. Men den slags tog en gud sig sin betaling for. Og intet kunne fornøje en gud mere end at kalde latteren frem hos de øvrige medlemmer af gudefamilien på Olympen.

Athene besluttede at opdagelsen skulle gøres af Pythagoras. Han havde i byen Kroton grundlagt en åndelig og kunskabssøgende bevægelse som fik meget stor udbredelse og betydning. Hans disciple betragtede ham som en halvgud - og tillagde ham opdagelser som de selv (og andre) havde gjort (således hans læresætning).

Men en frygtelig katastrofe fulgte i opdagelsens kølvand. Pythagoræernes "kloster" blev stormet og jævnet med jorden og de fleste pythagoræere dræbt. - Og de resterende - og blandt dem var Pythagoras - blev spredt for alle vinde. Dette kan umuligt have været med i Athene's plan.

Det fortælles at denne massakre var resultatet af byborgernes irritation over pythagoræernes ophøjede og sekteriske liv og deres provokerende opfattelser på en række områder. Pythagoræerne hævdede således at jorden er rund som en kugle og at det evige og himmelske liv er forbeholdt matematikere.

Men som det vil fremgå af den følgende beretning er dette en begrænset del af sandheden. Pythagoræerne var nemlig ikke så upopulære endda og de var meget opmærksomme på den fare som deres særprægede liv udsatte dem for. De holdt således mange af deres anskuelser og indsigter strengt hemmelige.

Der syntes at stå helt andre kræfter bag denne forbrydelse end den jævne byborger. Og Athene var ikke helt uden skyld - hun havde haft en alt for stor tiltro til Pythagoras' klarsynethed.

**Kapitel 1**

Engang lå i Syditalien en by der hed Sybaris. Denne by var græsk koloni og den var berygtet videnom for indbyggernes overdådige og nydelsessyge levemåde. Da grækerne imidlertid var et folk som sædvanligvis lagde stor vægt på mådehold, fremkaldte livet i Sybaris de omkringliggende byers vrede - en vrede der til sidst blev så stor at man indtog byen, ødelagde alt og bortjog eller dræbte indbyggerne. Siden den tid har "en sybarit" været et forfærdeligt skældsord - det er altså en person som æder og drikker og fornøjer sig umådeholdent.

Dette skete omkring år 500 før vor tidsregning - og det er på det tidspunkt at begivenhederne i denne beretning finder sted.

En af de byer som var med i dette felttog var byen Kroton. Også denne by var græsk koloni, og i dén havde den religiøse pythagoræerorden sit kloster. Pythagoræerne var meget aktive i kampen mod Sybaris, så de nød derfor en vis anseelse i byen, selv om man måske ikke brød sig så meget om deres religion.

Pythagoræerne levede et meget asketisk liv fyldt med regler og mystiske doktriner. Igennem meditation hensatte de sjælen i en ekstatisk tilstand så den frigjorde sig fra legemet og kom i berøring med det guddommelige kosmos. De lagde meget stor vægt på at beskæftige sig med videnskabelig forskning. Ånden blev nemlig renset ved fordybelse i ædle tanker. Især studerede de geometriske figurer og tal og musik. De satte alle tilværelsens fænomener i forbindelse med tal - de opdagede således at når strenge klinger harmonisk sammen, da står deres længder i simple talforhold til hinanden.

Deres åndelige overhoved var Pythagoras. Han var en gammel og meget lærd mand som havde boet og studeret næsten overalt i verden, og han havde haft dybsindige samtaler med alle de største filosoffer. Men nu havde han slået sig ned i Kroton og havde her grundlagt sin pythagoræerorden som snart talte over hundrede mandlige og kvindelige disciple. Deres kloster var et stort og svært befæstet bygningskompleks som lå på et højdedrag lige uden for byen.

Borgerne i Kroton levede som sagt et rimeligt mådeholdent og fromt liv. Men på et tidspunkt begyndte livet i byen at ændre sig. Dette skyldtes at en spillelidenskab greb om sig. Hvor spillet stammer fra vides ikke, men Kroton var en havneby og der foregik herfra en meget livlig handel med hele Middelhavsområdet, så det var givetvis søfolk der havde hjembragt spillet.

Til at begynde med brugte man småsten eller pinde som spillebrikker. Men snart begyndte man at spille om penge og man brugte da sølv- og guldmønterne som spillebrikker. Den spiller der vandt fik så alle mønterne.

Spillet foregik således: Kun to spillere kunne deltage. Disse lagde deres indsats i hver sin bunke på bordet. Indsatserne var sjældent lige store for der var altid en af spillerne som var den dygtigste og han måtte lægge en større pulje på bordet for at den mindre dygtige turde spille mod ham. Der skulle være rimelig mange mønter i hver pulje, og det var vigtigt at ingen spiller vidste helt præcis hvor mange mønter modparten ville lægge. Man trak lod om hvem der skulle begynde og spillerne skiftedes nu til at borttage mønter fra bunkerne. De måtte selv om hvilken bunke de ville tage fra og hvor mange mønter de ville tage, de skulle dog tage mindst een mønt og hvis de tog mønter fra begge bunker samtidig skulle de tage lige mange. Den der tog de sidste mønter havde vundet og han fik som sagt alle mønterne[1].

Guldmøntspillet blev uhyre populært. Der blev lagt meget store pengebeløb på bordene og adskillige spillere blev professionelle. To professionelle spillere kunne samle flere hundrede tilskuere omkring sig.

**Kapitel 2**

I Kroton boede en velhavende købmand og handelsrejsende. Han havde fem sønner - den yngste hed Hippias. Hippias var en køn og kvik dreng på 10 år. Han havde fået en god skoleuddannelse og han havde adskillige gange været med på faderens handelsrejser, så han havde således besøgt næsten alle havnebyer i verden.

Da han var med på et sådant togt, hørte han faderen sige at de skulle i havn i Itéa som lå nær byen Delfi i Grækenland. Hippias vidste at der i Delfi var et stort tempel for guden Apollon, som var sandheden og lysets gud og endvidere musikken og digtekunstens beskytter. Og at der i dette tempel var et orakel hvor man kunne stille spørgsmål til Apollon's præstinde Pythia, men at svaret altid kun blev givet i form af en gåde og at denne kunne være meget svær at tyde - ja af og til umulig - thi Pythia var i en omtåget og ekstatisk tilstand som skyldtes dunster der steg op igennem revner i undergrunden.

Hippias sagde til sin fader at han havde et spørgsmål han gerne ville stille Pythia - om han mon ikke kunne komme til at besøge Delfi. Delfi ligger et

1 Prøv at spille spillet, så vil du have nemmere ved at forstå det følgende.

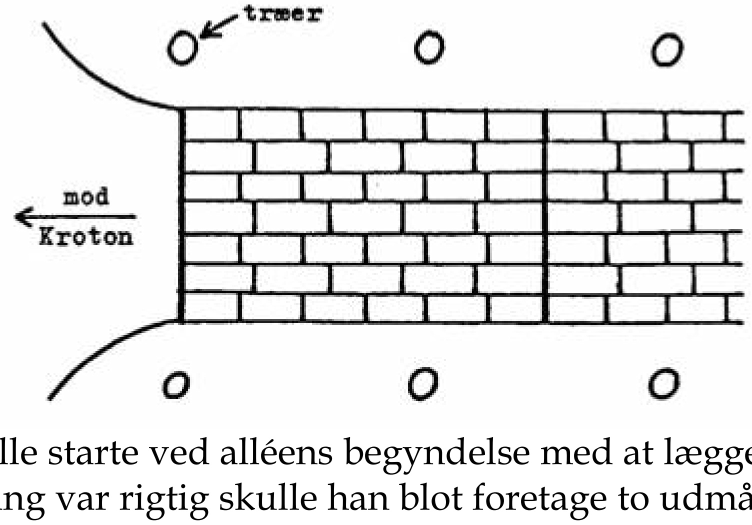
godt stykke vej fra Itéa - sagde faderen - men Hippias burde da absolut se Apollon's tempel som netop var blevet prægtigt genopført efter en brand, så han ville sørge for at noget af hans mandskab kunne ledsage ham dertil.
Da Hippias og søfolkene stod foran oraklet, sagde Hippias at han godt ville stille Pythia et spørgsmål under fire øjne. Dette respekterede søfolkene og trak sig tilbage. Hippias spurgte nu Pythia om hvordan man kunne vinde i guldmøntspillet.

Pythia svarede:

"Gå til "den gyldne allé" der fører til pythagoræernes kloster
- læg en mønt fra den lille bunke på hver af de korte fliser til der ikke er flere
- borttag lige så mange mønter fra den store bunke som der var mønter i den lille bunke og læg en mønt fra den resterende bunke på hver af de lange fliser til der ikke er flere
- hvis disse to rækker af mønter når lige langt - uden at de korte fliser dog når forbi de lange fliser - da kan du altid vinde spillet"

Dette svar kan sikkert tydes, tænkte Hippias. Det kunne ærgre ham at der ville gå flere måneder førend de var hjemme igen, men nu havde han da tid til at tænke over svaret.

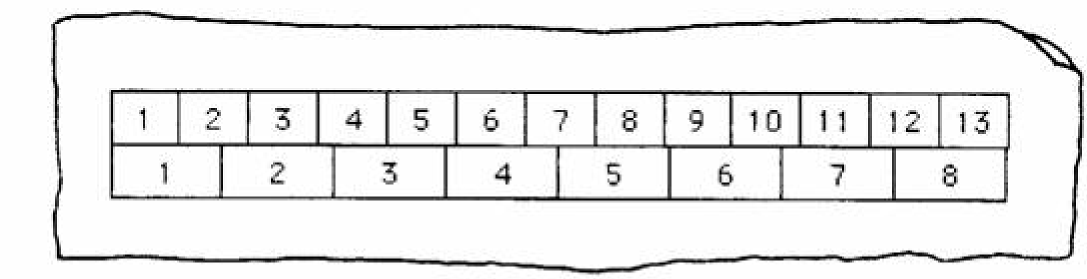
Han *havde* set "den gyldne allé", men han erindrede intet om dens fliser. Ifølge oraklet skulle der altså være to slags - korte og lange. Han formodede at fliserne lå nogenlunde således:




- og at man skulle starte ved alléens begyndelse med at lægge mønter. Hvis denne formodning var rigtig skulle han blot foretage to udmålinger når han kom ud til "den gyldne allé" - så han behøvede kun at medbringe en lige pind og en kniv.

**Kapitel 3**

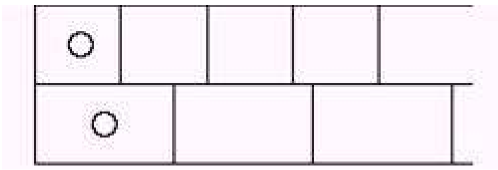
Da Hippias kom hjem, kunne det selvsagt ikke gå hurtigt nok med at komme ud til "den gyldne alle". Hans formodning var korrekt. Han foretog omhyggeligt sine udmålinger uden at nogen bemærkede det og skyndte sig hjem. Han tegnede et kort over den nødvendige del af flisealléen og det så således ud:




Og nu kom det vanskelige arbejde. For det første: hvilken størrelse skulle de to bunker have førend de passede med Pythia's beskrivelse?

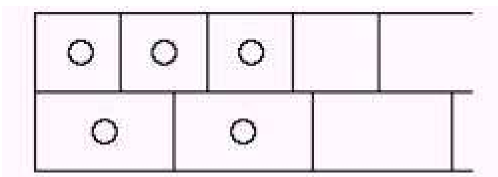
Hippias begyndte helt fra begyndelsen, og han fandt ud af det var nemmest hvis man nummererede tilfældene ud fra hvor mange mønter der lå på de lange fliser.

Hvis der lå 1 mønt på de lange fliser, da kunne kun en situation som denne komme på tale:



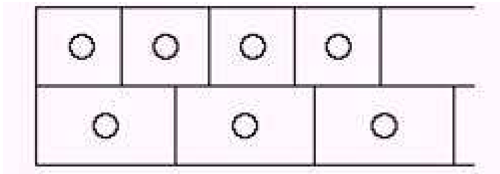
Der skulle altså være 1 mønt i den lille bunke og 2 mønter i den store bunke.

Hvis der lå 2 mønter på de lange fliser, da kunne kun en situation som denne komme på tale:



Der skulle altså være 3 mønter i den lille bunke og 5 mønter i den store bunke.

Hvis der lå 3 mønter på de lange fliser, da kunne kun en situation som denne komme på tale:



Der skulle altså være 4 mønter i den lille bunke og 7 mønter i den store bunke.

Hippias fortsatte disse overvejelser og nåede frem til denne række af talpar:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 6 | 10 |
| 5 | 8 | 13 |
| 6 | 9 | 15 |
| 7 | 11 | 18 |
| 8 | 12 | 20 |
| 9 | 14 | 23 |
| 10 | 16 | 26 |
| 11 | 17 | 28 |
| 12 | 19 | 31 |
| 13 | 21 | 34 |
| 14 | 22 | 36 |
| 15 | 24 | 39 |
| 16 | 25 | 41 |
| 17 | 27 | 44 |

Læg mærke til at et talpars nummer netop er forskellen mellem tallene. Han gættede at stillingen skulle være et sådant talpar *efter* at han havde borttaget mønter.

Spørgsmålet var dernæst: kunne han altid opnå en sådan stilling? Det nemmeste var nok at forsøge sig frem. Det viste sig, at uanset hvordan stillingen står, kan man altid ved blot eet træk nå frem til en stilling som optræder i denne række af talpar - hvis stillingen ikke er der i forvejen.

Strategien var nu helt klar: Når spillet er skredet så langt frem at han hurtigt kan tælle guldmønterne, skal han blot føre stillingen ind i denne række og sørge for at holde den dér. Og det ville hans modspiller ikke kunne forhindre, thi hver gang modspilleren trækker bliver stillingen nemlig rykket ud af rækken. Han ville da bevæge sig længere og længere opad i rækken og til sidst efterlade stillingen (1, 2) - og det var da klart at han havde vundet.
Han lærte rækken af talpar udenad og brændte derefter kortet og udregningerne. Hippias kunne nu påbegynde en forrygende karriere som storspiller.

**Kapitel 4**

Hippias startede med at udfordre sine brødre og derefter gik turen til enhver som han kunne få lokket til at spille. Og hver gang vandt han - det var forudbestemt - kun en der selv kendte talrækken kunne vinde over ham, og da kun hvis denne bragte talrækken i anvendelse førend ham selv - alt dette kunne han på forhånd udelukke.

Han blev hurtigere og hurtigere til at foretage sine træk. Der blev spillet med guldmønter og indsatserne blev større og større. Han slog snart alle de berømte storspillere og hans navn kom på alles læber. Hans forældre var stolte af ham og hans indtjening var svimlende.

I løbet af blot een uge var Hippias blevet spiller nummer eet. Kun de allerstørste professionelle spillere vovede at kæmpe mod ham, og da kun efter at han havde lokket med en gigantisk overindsats.

Men en sådan karriere måtte naturligvis få en ende: han ville udelukke sig selv fra spillet og mange ville have en stor interesse i at få ham skaffet af vejen.

Det gik nu ikke så galt endda.

Advarsler fra slægt og venners side havde ikke så hurtig virkning som det var ønsket. Så han kom til at opleve ubehagelige episoder, som han i sin lykkerus godt nok ignorerede, men som gnavede sig vej til hans sjæls allerinderste.

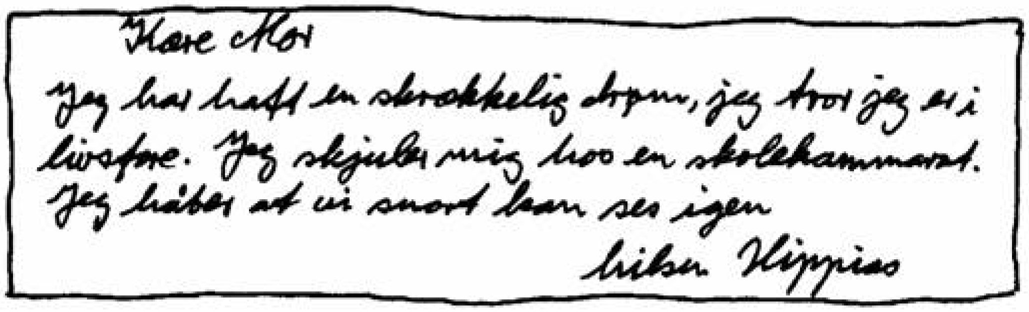
**Kapitel 5**

- Og en nat banede alle disse ophobede fortrædeligheder sig vej frem til hans bevidsthed. Han havde en grusom drøm: En bande, bestående blandt andre af en af de storspillere som i de foregående dage havde sendt ham de mest ondskabsfulde blikke, havde ført ham ud til kanten af en over hundrede meter dyb og næsten lodret klippeafgrund. På dette sted lod de ham forstå, at de var sikre på at han kendte spillets hemmelighed og at han nu skulle videregive sin viden til dem. Gjorde han det, ville han uskadt blive bragt tilbage, men nægtede han, ville hans unge legeme inden få minutter ligge knust ved foden af afgrunden.

Her ophørte hans drøm. Men hans mareridt var ikke slut. Han havde en uhyggelig følelse af at de ville have dræbt ham selv om han havde givet dem sin hemmelighed - hvad skulle de ellers? Og drømmen havde været så livagtig for ham at han følte, at den kunne blive til virkelighed når som helst. I flere timer lå han vågen og spekulerede over hvad han skulle gøre. Det var alt for usikkert at opholde sig her i huset - hans far og brødre var netop taget på en lang handelsrejse og han var alene med sin mor og deres to tjenestepiger.

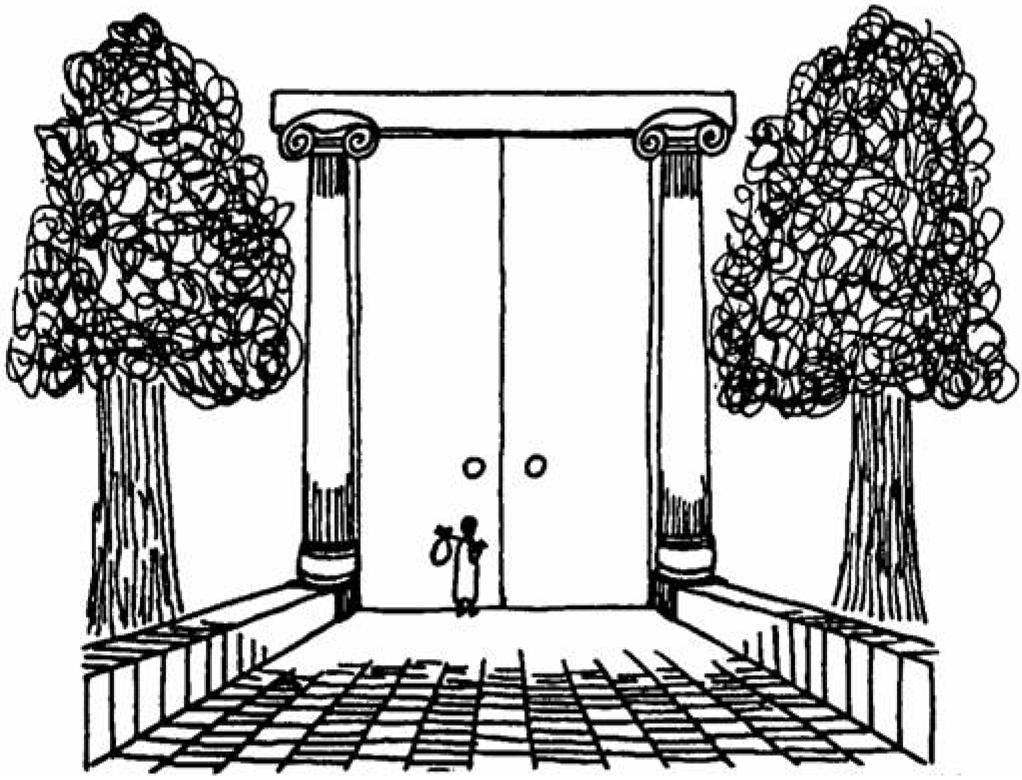
Da fik han pludselig en idé som kunne blive hans redning. Han erindrede at pythagoræernes kloster var stærkt bevogtet og at disse jo var meget interesserede i talspekulationer. Måske ville *de* yde ham beskyttelse hvis han videregav dem sin hemmelighed og de opdagelser om talrækken som han tillige havde gjort.

Der var ingen tid at spilde, han måtte afsted med det samme inden det blev lyst. Han skrev en kort besked til sin mor:


Kære Mor
Jeg har haft en skrækkelig drøm, jeg tror jeg er i livsfare. Jeg skjuler mig hos en skolekammerat. Jeg håber at vi snart kan ses igen
hilsen Hippias

- og listede derefter ud af huset med sine mest nødvendige ejendele.

**Kapitel 6**



Det var endnu mørkt da han stod foran den vældige port ind til pythagoræernes klosterområde. Han måtte tage sin ene sko af og banke på porten med den for at det kunne høres, men da blev der også straks åbnet et lille glughul i porten og han blev spurgt om sit ærinde. Han fik den besked, at deres åndelige overhoved og store mester Pythagoras enten sov eller arbejdede i sit bibliotek og under ingen omstændigheder måtte forstyrres, men at han kunne få ophold i en klostercelle indtil det blev dag. Han måtte dog indvilge i at blive ført dertil med bind for øjnene, thi ingen fremmed måtte se klosterets hemmeligheder. I cellen følte han sig tryg og snart fik søvnen tag over ham.

Hen på formiddagen blev han vækket af en ung kvindelig discipel som medbragte et fad morgenmad, og hun sagde, at der om en time ville blive afholdt et møde hvor Pythagoras og alle hans disciple ville være til stede.

Mødet blev afholdt i en lille og beskedent udstyret sal. Han blev ført dertil med bind for øjnene. Der var fyldt med disciple, og det var tydeligt at der var fjernet en del inventar og vægdekoration. For enden på en forhøjning sad den store mester Pythagoras. Han var et statelig og alvorligt udseende herre med et kraftigt skæg. Ved siden af ham på forhøjningen stod en tom stol og en tavle - han bød Hippias sætte sig.

Da uroen i den overfyldte sal havde lagt sig sagde Pythagoras: "Min unge ven, man har fortalt mig om din anmodning til os og om den farlige situation som din ungdommelige tankeløshed har bragt dig i. Dit navn er jo kendt videnom - også *vi* har hørt om dig. Du ved sikkert at vi nærer en dyb interesse for studiet af tallene. Vi mener at alle de mest storslående og guddommelige lovmæssigheder i verden kan udtrykkes i smukke og harmoniske talforhold. Og at dette studium er menneskesjælens eneste vej til det evige og himmelske liv. Men guldmøntspillet, som vi ser vinde mere og mere udbredelse, samt det løsagtige og ugudelige levned som spillet fører med sig, ser vi på med den største bekymring. Vi skal dog ikke dadle dig for din deltagelse i spillet - du er jo så ung. De talforhold som der muligvis skjuler sig i spillet vil vi dog gerne høre om - selv om vi ikke kan forestille os at de kan være særlig kønne" - disciplene lo - "Fortæl nu os allesammen din viden. Vi skal da garantere dig en sikkerhed på dette sted som du ikke vil kunne finde andre steder, og du skal få en god forplejning - og dette altsammen lige så længe som du ønsker det."

Hippias berettede nu overfor den lydhøre forsamling om hele hændelsesforløbet lige fra oraklets gåde til hans succesfulde karriere som spiller.

Pythagoræernes interesse blev naturligvis skærpet da de hørte at såvel "den gyldne allé" som "deres" gud - Apollon - havde været inddraget i sagen. Og Pythagoras udtalte sin uforbeholdne beundring for Hippias´ skarpsindige tolkning af oraklets gåde. Der var stærkt røre i hele forsamlingen og alle var nysgerrige efter at høre mere om talrækken.

Hippias fortsatte: "Jeg har opdaget at talrækken kan dannes uden at man gør brug af "den gyldne allé" - og han skyndte sig at tilføje - "I har jo sikkert også udtænkt "den gyldne allé" ud fra evigtgyldige love" - stemningen i salen fortalte ham at han havde ret, han fortsatte - "Første talpar fås ved at skrive et 1-tal og lægge 1 til 1-tallet, det er altså (1, 2), andet talpar fås ved at skrive det mindste tal vi ikke har medtaget indtil nu, altså 3, og lægge 2 til 3-tallet, det er altså (3, 5), tredie talpar fås ved at skrive det mindste tal vi ikke har medtaget indtil nu, altså 4, og lægge 3 til 4-tallet, det er altså (4, 7), - således kan vi fortsætte i det uendelige - og disse to rækker af talpar, dannet på helt forskellig måde, er præcis ens" - der var stor begejstring i forsamlingen - "Læg nu mærke til" - fortsatte han - "at ethvert af tallene 1, 2, 3, 4, osv. optræder præcist een gang i denne række af talpar - læg også mærke til at hvis vi danner talrækken" - han skrev tal på tavlen:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 osv.,

- "hvor hvert nyt tal er fremkommet ved at lægge de to foregående tal sammen, da kan vi bruge denne talrække til at danne rækken af talpar med – således at vi i virkeligheden slet ikke behøver at begynde fra begyndelsen – ethvert tal, f.eks. 19, vil nemlig altid være summen af nogle af disse tal, således 19=13+5+1, - dem sætter vi en streg under:

$$\underline{1} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \underline{5} \quad 8 \quad \underline{13} \quad 21 \quad 34$$

- den første streg skal være på en ulige plads og to streger må ikke følge lige efter hinanden - hvis vi rykker alle disse streger een plads til højre og lægger tallene sammen, da får vi det første tal i det 19-ende talpar, altså 1+8+21=30, og hvis vi rykker alle disse streger endnu een plads til højre og lægger tallene sammen, da får vi det andet tal i det 19-ende talpar, altså 2+13+34=49" – begejstringen i forsamlingen var nu endnu større - "Han er jo et geni". Hippias fortsatte: "Man kan også ud fra spillets række af talpar - der, som jeg nu har vist, kan dannes uden at gøre brug at "den gyldne allé" - aflæse hvor mange korte fliser der skal bruges når man har et givet antal lange fliser - thi hvis der f.eks. er 10 lange fliser, da vil det første tal i det 10-ende talpar, altså 16, angive hvor mange korte fliser der skal bruges" - stemningen i salen var nu nærmest ekstatisk - han tilføjede: "Rækkerne af korte og lange fliser vil naturligvis aldrig kunne nå helt præcis lige langt" - "Ikke lige langt?" - sagde Pythagoras forundret - det var vist kun få af disciplene som hørte Hippias´ tilføjelse og disse klukkede overbærende.

"Min unge ven" - sagde Pythagoras - "du imponerer os med dine gode kundskaber og din skarpsindighed, men du er jo så ung og du kan endnu ikke vide alt - men ser du - ethvert voksent og lærd menneske vil vide, at de to rækker fliser altid vil nå præcis lige langt, blot man tager tilstrækkelig mange fliser - og dette vil gælde uanset om der er tale om fliser eller andre længdestykker eller om der er tale om to geometriske liniestykker. Thi vi vil altid kunne finde et lille liniestykke således at det går et helt antal gange op i begge liniestykker - vi kan tage et lillebitte liniestykke og så gøre det mindre og mindre indtil det passer - hvis så det korte liniestykke er det lillebitte liniestykke taget 144 gange og det lange liniestykke er det lillebitte liniestykke taget 233 gange, så vil det jo gælde at hvis vi tager det korte liniestykke 233 gange og det lange liniestykke 144 gange, så vil vi være nået præcis lige langt" - disciplene lo fornøjeligt over deres mesters udførlige redegørelse, men drengen havde jo fortjent et ordentligt svar.

Hippias var ildrød i hovedet og han spurgte nu helt forvirret: "Jamen, hvornår vil fliserækkerne da mødes - jeg mener, hvor mange korte og lange fliser skal der til førend de to fliserækker er præcis lige lange?" - der blev en pludselig stilhed i forsamlingen - da sagde Pythagoras: "Min unge ven. Hele verden er opbygget af talforhold. Og ingen har så stor viden om disse talforhold som vi i dette kloster. Men du kan ikke forvente af os at vi på stående fod kan besvare alle spørgsmål som angår talforhold - men vi kan altid finde et svar hvis vi studerer sagen omhyggeligt - det er jo netop det der er vores vigtigste virke. Mine dygtige og trofaste disciple: lad os vise vores unge ven at forholdet mellem længderne af de gyldne fliser - som jo omhyggeligt er afstemt efter længden af en side og en diagonal i en regulær femkant - at dette forhold lader sig udtrykke ved et smukt talforhold. Vi sender nu drengen her tilbage til sin celle og straks efter vores aftensmåltid mødes vi i denne sal. Jeg vil da have tænkt over vilkårene for hans fortsatte ophold her i klosteret og jeg forventer jeres svar på det talproblem vi her er blevet beriget med".

## Kapitel 7

I løbet af dagen kom flere af disciplene ind til ham i cellen. De måtte ikke tale om deres ordens hemmeligheder, men de lyttede interesserede til hans beretning om sine oplevelser på de mange rejser til fjerne lande og om sin spillekarriere.

Efter at han havde fået sin aftensmad fik han dog besked om at det aftalte møde var udsat indtil videre.

Og to gange senere på aftenen fik han den samme besked.

Omkring midnat, da han forlængst var faldet i søvn, blev han vækket. Hans hjerte stod næsten stille da han så at det var selveste Pythagoras som stod bøjet over ham.

Det var tydeligt at Pythagoras forsøgte at skjule at han var stærkt oprevet. Han gik lige til sagen: "Min unge ven - du nævnte at det er *klart* at de to fliserækker aldrig vil kunne mødes - hvordan er det klart?" "Øh - joh altså" – sagde Hippias fortumlet - "antag at der f.eks. skal 34 korte fliser til at give 21 lange fliser helt præcis - da vil det jo gælde at når man går 21 trin frem i rækken af talpar da skal det første tal i et talpar forøges med 34" - at dette er rigtigt kunne den skrapsindige Pythagoras straks se - "Det første tal i det talpar som står på plads nummer 34+21=55, vil da være lig med det andet tal i det talpar som står på plads nummer 34 - og vi har altså fundet et tal som forekommer to gange i rækken, men det strider jo mod den første af de måder som jeg har vist at rækken kan dannes på uden at man gør brug af "den gyldne allé""[2].

Pythagoras var lamslået - argumentet kunne han ikke afvise - han forlod cellen uden et ord.

**Kapitel 8**

Hippias sov ikke mere den nat. Det gik nu op for ham at han havde rokket ved det dogme som var fundamentet under pythagoræernes verdensbillede - nemlig at alle størrelsesforhold kan udtrykkes i talforhold. Disse talforhold skal helst være enkle, smukke og harmoniske. Men nu har det vist sig at forholdet mellem en side og en diagonal i den regulære femkant - som jo er den

2 Dette er ikke let at se - vent til du har kigget på opgaverne.

guddommeligste af alle geometriske figurer - at dette forhold slet ikke kan udtrykkes i et tal overhovedet. Denne erkendelse måtte for dem være intet mindre end en katastrofe.

Han anede ikke sit levende råd. Ville også *de* nu betragte ham som værende besat af et dæmon? Ville de dræbe ham? Ingen vidste at han var her. De ville i hvert fald aldrig kunne lukke ham ud. Hvis folk udenfor fik noget at vide om dette, ville al den respekt og beundring som de trods alt nærede for pythagoræerne blive forvandlet til hån og latter.

Han var nu mere skrækslagen end han havde været den foregående nat. Nu var han for alvor i livsfare. Han gik fortvivlet op og ned af gulvet i cellen og hans lille hjerne arbejdede som en rasende. Men nej - han kom ingen vegne. Ville guderne mon ikke hjælpe ham i denne nød? Den mest nærliggende mu-lighed var visdommens gudinde Athene.

Han bad:

"Pallas Athene
- du smukkeste af alle gudinde
- du viseste af alle guder
- du som kender alle universets hemmeligheder
- du som utallige gange frelste den dumdristige Odysseus
- hjælp mig - bare denne ene gang
- vis at du elsker den sandfærdige kundskab"

Straks efter hans bøn trådte en skikkelse frem foran ham - først tåget, siden mere og mere klar.

Hun talte:

"Hippias
- når mennesker længe har haft en fejlagtig tro vil de altid sætte sig imod at denne forandres, og de vil tit begå uret imod den som viser dem fejlen
- men når de er blevet ført til sandheden og har set dennes klarhed og harmoni - da vil de takke den som viste dem vejen
- lad os holde dem lidt hen med snak
- sig til dem: "jeg har vist Jer to rækker af talpar - én dannet geometrisk og én dannet aritmetisk - de er uendelig lange og ens til at til at begynde med, men de kan jo blive forskellige når man går langt ud i dem"

Herefter forsvandt Athene. Hippias følte en uendelig lettelse. Athene havde jo ret - han havde intet *bevist*.

Han tilkaldte straks en af de vagthavende disciple. Til ham sagde han: "Jeg havde en sælsom drøm - jeg har vist Jer flere måder at danne rækken af tal-par på - een ved hjælp af "den gyldne allé" og to andre helt uden brug af "den gyldne allé". Talrækkerne er tilsyneladende ens, men jeg drømte at de blev forskellige hvis man går tilstrækkelig langt ud i dem - jeg har jo heller ikke bevist at de er ens - måske Jeres mester kan hjælpe med at besvare dette spørgsmål". Disciplen viderebragte straks denne oplysning til Pythagoras som gik frem og tilbage i klostergårdens søjlegang.

Efter denne brist i hans bevis for at der findes størrelsesforhold som ikke kan udtrykkes i talforhold, var det dilemma han havde sat pythagoræerne i blevet noget reduceret. *Hvis* forholdet mellem diagonalen og siden i den regulære femkant kan udtrykkes i et tal, ville de kunne finde dette tal. Hvis ikke, ville deres undersøgelser føre dem til selv at indse en mangel i deres lære. Men uanset udfaldet af dette, var de bragt i en farlig situation. Hvis det ikke er klart for dig allerede nu - kære læser - da vil det blive det når du har læst lidt videre i denne beretning.

**Kapitel 9**

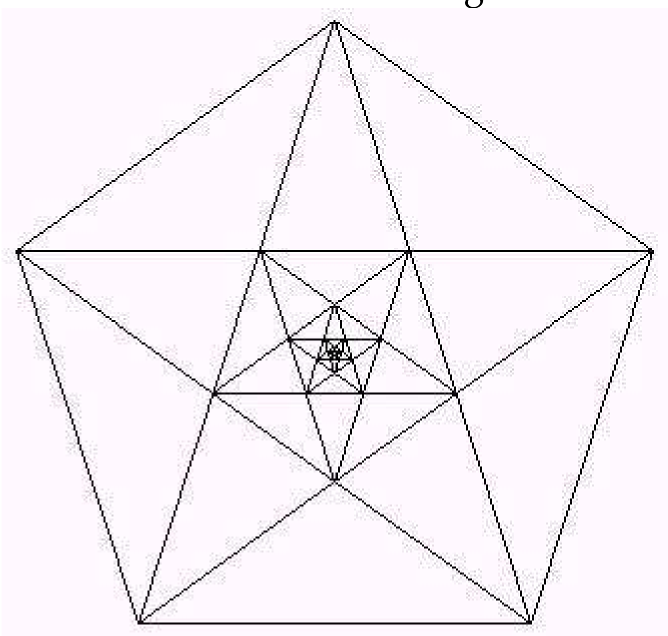
Det lykkedes ham at få sovet lidt om formiddagen. Da han vågnede ved middagstid meddelte en kvindelig discipel ham, at Pythagoras ville overveje vilkårene for hans ophold i klosteret i løbet af dagen og at han ville få besked når afgørelsen forelå.

Først sent på aftenen modtog han besked af en højtstående discipel. Denne fortalte ham, at man følte et stort ansvar for hans liv og at man derfor ikke kunne lade ham forlade klosteret foreløbig. Man foreslog ham, at han - trods sin unge alder - blev discipel af Pythagoras ganske på linie med de andre disciple. Han ville da blive indviet i alle klosterets hemmeligheder og han ville få en god undervisning. Man havde sendt bud til hans slægt om hvor han befandt sig, og overfor disse påpeget den fare han ville være i uden for klosteret. - De kunne besøge ham når som helst de ønskede det.

Hippias var straks begejstret for deres beslutning. Her var han i sikkerhed, her kunne han dyrke sin store interesse for tal, og skulle han engang ønske at komme bort herfra kunne han nok bare flygte.

I den følgende tid blev han vist rundt i hele klosterområdet og indviet i livet dér. Det var et både storslået og fremmedartet syn der mødte ham. Foruden de meget simple celler hvor disciplene sov, var der et utal af værelser og sale hvor man næsten intet så af det man normalt ser i rum hvor mennesker færdes, men til gengæld de mest besynderlige instrumenter og opstillinger. Der var laboratorier hvor man udførte alle tænkelige fysiske forsøg. Man eksperimenterede med musikinstrumenter og mekaniske indretninger, man udforskede stjernehimmelen og man foretog udmålinger af alt lige fra bjergkrystaller og edderkroppespind til sneglehuse og menneskeskeletter. Og der var nøgne sale hvor der på væggene var optegnet sære geometriske figurer og indmuret sten som dannede særlige mønstre. Pythagoræerne sad mange timer hver dag i fuldkommen ro på gulvet i disse sale og betragtede figurerne.

Mest imponerende var den store pentagonsal. Denne var et kæmpemæssigt femkantet rum hvor der i loftet, som var fuldkomment plant, var aftegnet et sindrigt system af pentagrammer - først et stort der nåede helt ud til ydervæggene - inde i dette et lidt mindre - og inde i dette et lidt mindre osv. - det var umuligt at tælle hvor mange for tilsyneladende endte de aldrig. Præcis i midten af hver af væggene var der et stort cirkelformet vindue. I denne sal skulle disciplene hver dag - i tidsrummet fra et kvarter før middag til et kvarter efter middag - ligge på gulvet og betragte det indviklede system af pentagrammer - de skulle forundres over dets guddommelige harmoni.



Livet i klosteret var lagt meget nøje tilrette. Der var et utal af ritualer der skulle følges og alt foregik på præcise tidspunkter. Undervisningen som Hippias skulle følge var streng, men den var meget alsidig og den interesserede ham.

## Kapital 10

Inden Hippias første gang skulle meditere i pentagonsalen fortalte en kvindelig discipel ham, at de korte og lange fliser i "den gyldne allé" var præcis lige så lange som siden og diagonalen i det femte pentagram.

Da han nu lå dér, og oplevede skaberens ufattelige storhed, fik han en følelse af at han havde ret, da han havde hævdet at uanset hvor mange korte og lange fliser man lægger i to rækker, da vil disse to rækker aldrig nogensinde nå lige langt. Denne følelse fik han fordi følgen af pentagrammer aldrig syntes at ende. Han kunne dog ikke helt klart gennemskue sammenhængen mellem disse to fænomener, men tanken optog ham meget i den følgende tid. Og når han nu tænkte nærmere over tingene, kunne han slet ikke forstå hvorfor pythagoræerne ikke forlængst var kommet til klarhed over dette tal som jo stod dem allernærmest. Mon ikke sandheden var, at de allerede længe - forgæves - havde forsøgt at finde det? Ja, måske endog, at han i virkeligheden blot havde bekræftet en frygtelig mistanke som Pythagoras selv havde? Han kunne se at der skulle et *geometrisk* ræsonnement til som ikke var helt nærliggende. Og det forekom ham, at pythagoræerne lagde alt for megen vægt på at se talrelationer overalt - de var nok slet ikke særlig gode til geometri.

Pythagoras og nogle af hans nærmeststående disciple gik i den følgende tid påfaldende mange timer om dagen - og tit også om natten - i dybe tanker frem og tilbage i søjlegangen rundt om klosterets gård - og de aflagde pentagonsalen hyppige besøg. Når de mødtes havde de af og til korte tankeudvekslinger.

Da dette havde stået på i flere uger, så han dog en bedring i deres humør. Ja, senere var det klart for ham at de havde gjort en stor opdagelse. De fortsatte dog i nogen tid endnu med at være hensat i dyb spekulation.

## Kapitel 11

Men en dag indkaldte Pythagoras alle sine disciple til et meget vigtigt møde i pentagonsalen.

"Brødre og søstre" - sagde han - "mine kære og trofaste disciple. Det er menneskets største lykke at gøre nye opdagelser, og en indsigt i den orden og harmoni som hersker i universet er en forudsætning for at sjælen kan komme i berøring med det guddommelige kosmos. Intet sted i verden er der blevet gjort så mange nye opdagelser som her hos os. Men ikke blot har vi gjort nye opdagelser, vi har også forkastet gamle og fejlagtige opfattelser og erstattet dem med nye og sande. Dette har nogle gange haft til følge, at vi har måttet foretage korrektioner i vores lære, men når disse var foretaget, har resultatet altid været en lære af endnu større skønhed og fuldkommenhed.

I de seneste uger har jeg og nogle af mine dygtige disciple gjort en opdagelse af allerstørste betydning.

I ved - mine disciple - at der til alt i verden hører tal og at tingenes væsen kun kan fattes når man kender deres tal. Når således toner klinger iørefaldende sammen, da står strengenes længder altid i smukke talforhold til hinanden, vi har jo opdaget at hele strengen, kvarten, kvinten og oktaven står i den fuldkomne proportion[3].

Lad os nu studere denne kønne talrække" - han skrev følgende tal på en stor tavle:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 osv.

- Hippias genkendte den straks, det var jo ham der havde opdaget den – "Bemærk at hvert nyt tal er fremkommet ved at lægge de to foregående tal sammen. Vi har gjort den opdagelse, at forholdet mellem to på hinanden følgende tal i denne talrække vil nærme sig mere og mere til forholdet mellem en side og en diagonal i et af de pentagrammer som I ser i loftet" - "nærme sig ..." - mumlede flere af disciplene undrende - Hippias følte sig gennemstrømmet af en ubeskrivelig glæde - "Intet talpar vil præcist angive forholdet mellem siden og diagonalen i et pentagram, men afvigelsen kan gøres lige så lille som det skal være, vi skal bare gå tilstrækkeligt langt ud i denne talrække.

Mine kære brødre og søstre: denne talrække som vil berige vor lære har guderne skænket os igennem vores nye unge discipel, som jeg med stor glæde hører trives her iblandt os. Igennem dette unge menneske har guderne bibragt os den erkendelse, at rækkerne af korte og lange fliser i "den gyldne allé" aldrig vil nå præcis lige langt" - forsamlingen var tydeligt desorienteret - Hippias var svimmel af lykke - "men hvis man f.eks. lægger 21 lange fliser i forlængelse af hinanden og 34 korte fliser i forlængelse af hinanden, da vil

3 12:9:8:6, 12/9=8/6, 9=(12+6)/2 (aritmetisk middel), 1/8=(1/12+1/6)/2 (harmonisk middel).

afvigelsen af disse længder være mindre end en 34-te del af en kort flise - vi kan få afvigelsen til at blive lige så lille som det skal være, vi skal blot tage to på hinanden følgende tal meget langt ude i denne smukke talrække, og så tage dette antal lange og korte fliser.

At et sådant fænomen kan indtræffe vil vi i den kommende tid forsøge at finde yderligere eksempler på - jeg håber at vores unge discipel vil deltage aktivt i dette arbejde" - Hippias nikkede ivrigt.

"Denne nye erkendelse kan vi også formulere på den måde, at der gives eksempler på to geometriske liniestykker således at intet liniestykke kan være indeholdt et helt antal gange i dem begge - uanset hvor lille dette liniestykke er. Hvis vi altså udregner længden af det ene liniestykke i forhold til det andet ved antanairesis[4], kan det hænde at vi aldrig nogensinde vil blive færdige - udregningerne kan fortsættes i det uendelige" - disciplene var mål-løse.

"Vi kan ikke forvente at det uoplyste folk uden for disse mure vil kunne fatte disse nye indsigter. Der er grund til at frygte, at denne forkastelse af en vedtaget lære vil forstærke den hetz der har været ført imod os fra mange sider - de vil mene at den strider imod vor lære om at "alt er tal". Jeg må derfor indtil videre på det strengeste forbyde mine disciple enhver omtale af vores nye erkendelse til noget menneske udenfor denne kreds - ganske som jeg tidligere har forbudt omtale af nye indsigter - således vor kundskab om jordens sande form".

Den nye lære var en svær kamel at sluge for nogle af disciplene - især de lidt ældre - men: "Han har jo selv sagt det".

Deres novise Hippias, som var skyld i alt dette postyr, blev dog ikke destomindre optaget i det broder- og søsterlige fællesskab.

## Kapitel 12

I de følgende år rykkede Hippias' plads i hierakiet nærmere og nærmere mod den store mester Pythagoras. Han gjorde et utal af skelsættende opdagelser, som styrkede pythagoræernes følelse af at være et af guderne udvalgt folk.

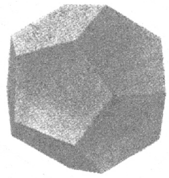
Således viste han, at forholdet mellem en diagonal og en side i et pentagram, er givet ved følgende smukke tal som ikke er noget rigtigt tal (vi skriver det

4 "Vekselvis borttagning", se appendiks.

som Hippias selv skrev det):

α,(α,(α,(α,(α,...)')')')'

(α betyder tallet 1, a,b betyder a+b, (a/b)' betyder b/a, specielt: a' betyder 1/a) (prøv at udregne den viste del af tallet, og sammenlign dette tal med tallene i Pythagoras' talrække). Og han viste, at hvis man skærer tolv femkanter ud af tynde plader, vil de kunne sættes sammen til et kugleformet legeme:

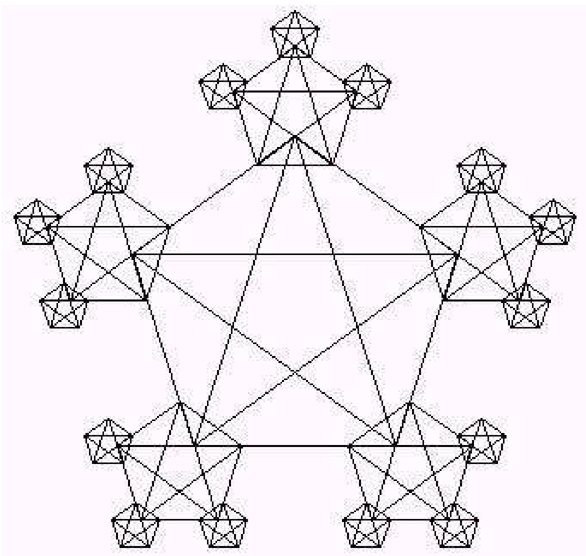


og at forholdet mellem diameteren i kuglen og en diagonal i femkanterne, er givet ved følgende tal som ikke er noget rigtigt tal:

α,(α,(β,(α,(β,...)')')')'

(β betyder tallet 2) (prøv at udregne den viste del af tallet, og kvadrer dette tal)[5].

Hans mærkeligste resultat gik ud på, at hvis man fortsætter denne figur i det uendelige:



da er forholdet mellem "radius" af den uendelige figur og radius af den store femkant, lig tre gange forholdet mellem side og diagonal i en femkant - og endvidere vil omkredsen af figurene vokse mod det uendelige.

5 Udregn disse tal som Hippias ville have gjort det, notation: α=1, β=2, γ=3, δ=4, ε=5, ϕ=6, ζ=7, η=8, θ=9, ι=10, κ=20, 13=ιγ, 21=κα, 1/5=ε', 21/13=καιγ' (der sættes en streg over et tal for at skille det fra et andet tal eller fra et ord).

Men hvordan kan det iøvrigt være, at spillets række af talpar, som jo er udtænkt af et dæmon, kan indeholde Pythagoras' smukke talrække? (sammenlign Pythagoras' talrække med spillets række af talpar). Dette beror naturligvis på, at man jo blot fisker passende tal ud af spillets række (den indeholder jo *alle* tal). Hippias og Pythagoras fik snart bragt spillerækkens uhyggelige natur frem for dagens lys, og efter dén afsløring var det forbudt i klosteret at beskæftige sig med den - ja, bare at nævne den ved navn. I spillets række er der et regulært paradoks som mennesket aldrig nogensinde ville kunne fatte eller forklare: For ethvert første tal i et talpar, f.eks. 4 (første tal i (4,7)), kan man danne en uendelig række af talpar fra spillets række:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (6,10) | (16,26) | (42,68) | .... |
| nr. 4 | nr. 10 | nr. 26 | |

To forskellige sådanne rækker vil aldrig kunne indeholde et og samme talpar, og ethvert talpar i spillets række vil forekomme i en sådan række. Der er altså *uendelig* mange gange flere talpar i spillets række end der er tal som forekommer som første tal i et talpar, men der skulle jo være lige mange.

Udenfor klosteret bevægede livet sig imidlertid i en helt anden retning. Da denne dreng nu var sporløst forsvundet kom der atter gang i spilleriet - og overalt hvor spillelidenskab stortrives, trives også ødselhed, drikkeri, voldshandlinger, hor og ugudelighed.

Denne udvikling bekymrede de fromme pythagoræere. Ikke mindst fordi den var farlig for dem - af den grund var de meget forsigtige med at blande sig i forholdene.

Men de havde jo unægteligt et effektivt redskab i hænde til at få sat en hurtig stopper for den ulykkelige udvikling - men turde de bruge det?

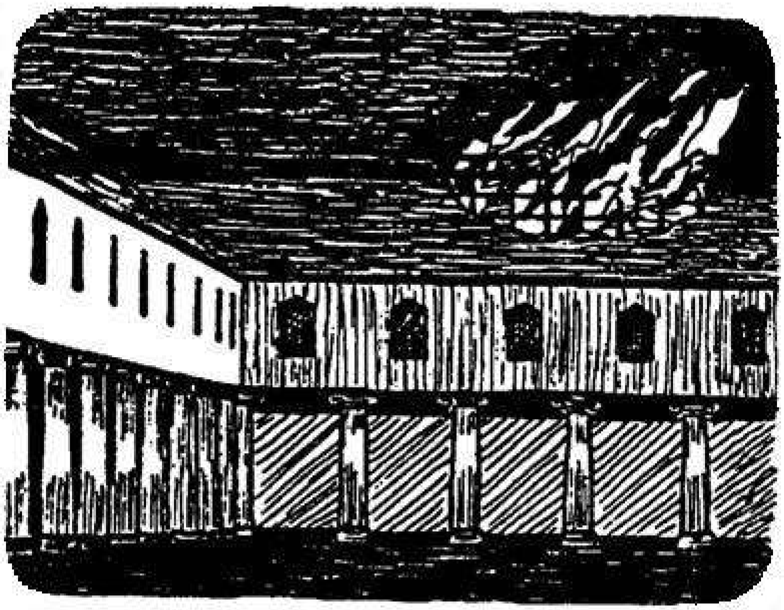
## Sidste Kapitel

Til sidst følte pythagoræerne dog at de ikke længere havde noget valg. Livet i Kroton var nu værre end livet i Sybaris. De nedfældede derfor talrækken og dens brug på et stort antal stykker papyrus og lod dem - i nattens mulm og mørke - opklæbe centrale steder i byen.

Hermed var tusinder af mennesker gjort arbejdsløse. Ikke bare de mange hundrede professionelle spillere, men også alle de der indirekte levede af spillet.

Men pythagoræerne slap ikke levende fra dette skridt.

En talstærk bande trængte en tidlig morgen ind i klosteret - dræbte alle de disciple som de overhovedet kunne få ram på og stak klosteret i brand. Det lykkedes dog for Hippias at få hejset sin gamle mester og sig selv ned i klosterets brønd uden at nogen opdagede det. Dernede sad de i næsten to døgn og hørte ilden knitre.



Så skrævede de grædende henover de forkullede rester af musikinstrumenter og meddisciple og søgte mod Hippias' barndomshjem. Her blev de skjult i et par trækasser og båret til faderens skib. De blev sejlet til byen Metapontion. Her grundlagde de en ny pythagoræerorden og de hørte til deres store glæde at også andre disciple havde haft held med at flygte og havde grundlagt pythagoræerordener i andre byer. Pythagoras døde nogle år senere og Hippias blev den nye ordens overhoved.

Denne spredning af de oprindelige pythagoræere førte faktisk til en udbredelse af deres lære og virke. De fik en betydelig indflydelse på de følgende århundreders tænkning, ikke mindst på den store filosof Platon.

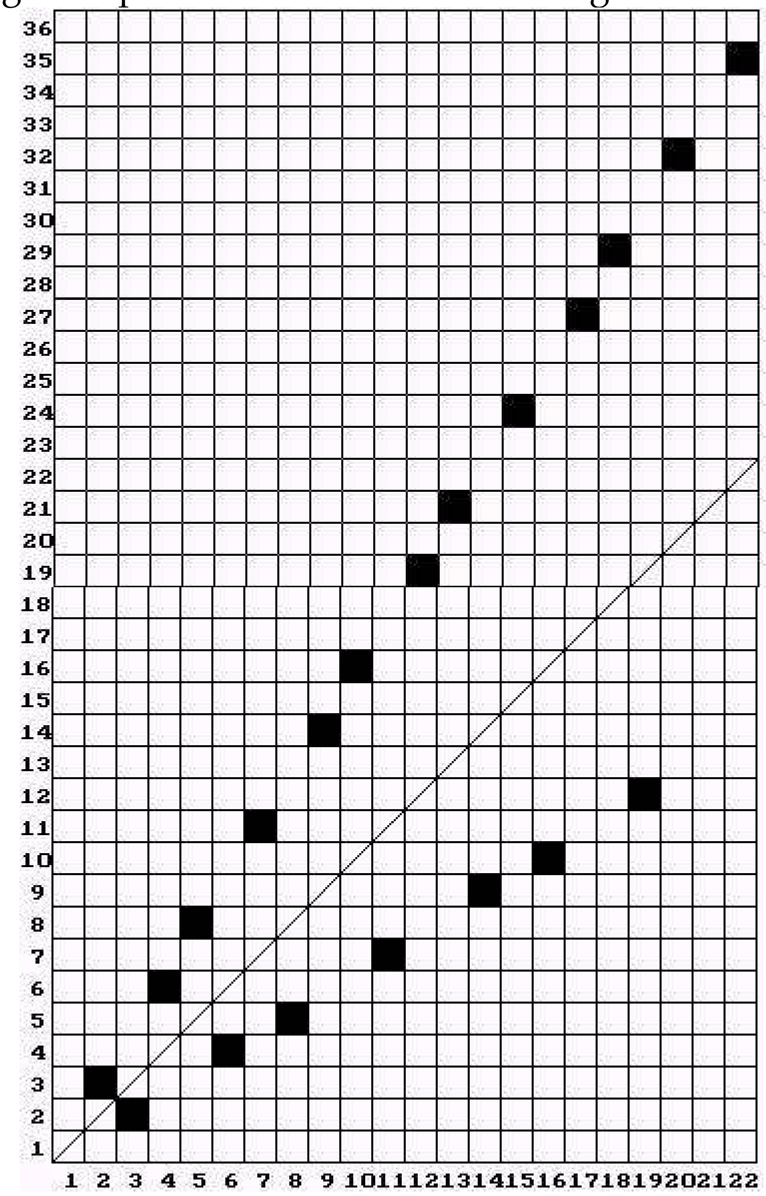
Men hvorfra vidste man at det var pythagoræerne som stod bag spillets dødsdom? - Det får vi aldrig at vide. Men denne beretning om pythagoræernes sidste dage i Kroton peger på at Pythagoras først for sent fik pålagt sine disciple tavshed om at spillets hemmelighed befandt sig indenfor klosterets mure.

**Opgaver**

De opgaver som ikke er markeret med en stjerne (eller indrammet af stjerner) skulle falde indenfor gymnasiets rammer, og de bør i det mindste gennemlæses da den matematik som forekommer i Beretningen uddybes i disse.

I det følgende vil første og andet tal i talpar nummer n i spillets række være betegnet $a_n$ og $b_n$.

**1** Vinderstrategien i spillet er illustreret i dette diagram.



Hvert felt svarer til en stilling i spillet - altså til to naturlige tal (feltets koordinater). Et felt er sort når det svarer til et talpar i spillets række. Da bunkernes orden (rækkefølge) jo er uden betydning, kan tallene i talparrene ombyttes -

derfor symmetrien omkring linien x = y.

Vælg nu et tilfældigt (hvidt) felt. Hvilke felter kan man komme til ved hver af de tre typer af tilladte træk? At føre stillingen ind i spillets række svarer til at komme fra et hvidt felt til et sort. Overbevis dig om at dette altid kan lade sig gøre. Det kan endda ofte gøres på mere end een måde - dog højst tre. Farv de felter hvor det kan gøres på henholdsvis to og tre måder. Når du har farvet nogle få felter vil du se et mønster så du nemt kan farve resten. Du kan nøjes med felterne over diagonalen.

Overbevis dig om at hvis du *er* i spillets række, vil et træk altid føre dig *ud* af spillets række.

*Bevis* at stillingen i spillet altid kan føres ind i rækken af talpar ved blot eet træk, hvis den ikke er der i forvejen, og at et træk i så fald vil føre stillingen ud af rækken (benyt: 1. ethvert naturligt tal forekommer præcist een gang i rækken af talpar, 2. ethvert naturligt tal n forekommer præcist een gang som differens mellem tallene i et talpar (a, b) (altså n = b-a, n er talparrets nummer), 3. hvis m < n er $a_m < a_n$ (disse egenskaber bevises i opgave 7)).

Spillets række blev fundet af *Wythoff* i 1907, han indså at den skulle have disse egenskaber og konstruerede den på samme måde som Hippias i hans første konstruktion uden brug af "den gyldne allé" (side 10), først bagefter opdagede Wythoff at den kan konstrueres ved hjælp af det gyldne snit (opgave 7).

*[Studér dette computerprogram:

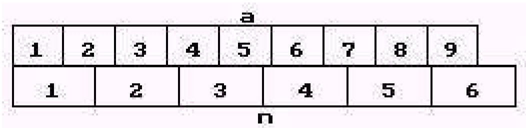
```
  label 0, 1, 2, 3;
  const g = (1+sqrt(5))/2;  {sqrt(x)=√x}
  var h, i, j, k, m, n, n1: integer;
begin
  read(m);                  {antal mønter i den ene bunke}
  read(n);                  {antal mønter i den anden bunke}
  if m > n then
    begin
      n1 := n;
      n := m;               {byt om på m og n}
      m := n1;
    end;
  k := 1;
0:i := trunc(k*g);
  j := i + k;               {trunc(x) = den hele del af x}
  if m = j then
```

```
    begin
      h := n – i;
      goto 3;
    end;
  if m = i then
    begin
      h := n – j;
      if h < 0 then
        goto 1;
      if h = 0 then
        goto 2;
      if h > 0 then
        goto 3;
      k := k+1;
      goto 0;
    end;
1:  write('fjern', m-trunc((n-m)*g), 'mønter fra begge bunker');
2:  write('din modspiller er i vinderposition');
3:  write('fjern', h, 'mønter fra den store bunke');
end.
```

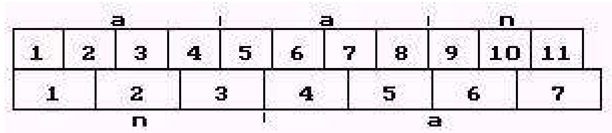
Vis at computeren gør følgende: Vi kan antage at stillingens felt er over diagonalen. Hvis der *er* et sort felt lodret under feltet, vælger vi dette. Hvis ikke, går vi diagonalt indad indtil vi er på et sort felt (det sorte felts nummer er da netop stillingens "højde" over diagonalen).]*

Hvis vi fra et givet sort felt (over diagonalen) spejler i diagonalen og derefter går lodret opad vil vi komme til et (hvidt) felt som er *nabo* til et sort felt. Hvis du ser på talparrene i rækken som svarer til disse to sorte felter ser du at: Det andet talpars nummer er det første tal i det første talpar, og det første tal i det andet par er een mindre end det andet tal i det første par. Rækken har altså egenskaben (Regel 1): $a_{a_n} = b_n - 1$ (undtagen for n = 1).

**2** Hippias havde opdaget (side 6) at vi kan finde det første tal i talpar nummer n (altså $a_n$) således (n er jo antallet af mønter på de lange fliser):




(altså: hvis D (som diagonal) er længden af en lang flise og S (som side) er længden af en kort flise, er $a = a_n$ bestemt ved $aS < nD < (a+1)S$). Men han havde også opdaget at fliserækken har en egenskab som kan illustreres således:




Vis at dette betyder at summen af de to tal i et talpar i spillets række netop er det første tal i det talpar hvis nummer er det andet tal. Rækken har altså egenskaben (Regel 2): $a_{bn}=a_n + b_n$.

**3** Det n-te tal i talrækken på side 10 og side 18 betegnes $f_n$. $f_n$ er altså bestemt ved $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ og $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Denne talrække kaldes Fibonacci's talrække (efter *Fibonacci* som levede i 1200-tallet). Vis at $f_{2n} = \sum f_i$ (sum over i ulige < 2n) og $f_{2n+1} = 1 + \sum f_i$ (sum over i lige ≤ 2n). Vis at

$$f_n/f_{n-1} = 1/((f_{n+1}/f_n) - 1).$$

Hvis du afmærker tallene $f_{n+1}/f_n$, n = 1, 2, 3, ..., på tallinien, ser du at de vil nærme sig mere og mere til et bestemt tal g. Vis at g = 1/(g-1) og at g ikke kan være rationalt (antag at g = p/q og vis at p og q har samme primfaktorer). Find g ved at løse ligningen.

For to naturlige tal a og b betegner sfd(a, b) deres *største fælles divisor* (altså det største tal som går op i både a og b, eks.: sfd(12, 20)=4). a og b er *indbyrdes primiske* hvis sfd(a, b)=1 (dvs. a og b har ingen fælles divisorer, eks.: 8 og 21).

Vis at to på hinanden følgende Fibonaccital $f_n$ og $f_{n+1}$ altid er indbyrdes primiske (brug *induktion,* dvs. vis 1. $f_1$ og $f_2$ har ikke fælles divisorer, og 2. *hvis* f(n) og f(n+1) ikke har fælles divisorer, så har $f_{n+1}$ og $f_{n+2}$ heller ikke fælles divisorer).

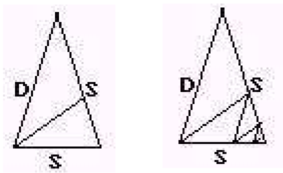
*[Vis at $sfd(f_m, f_n)=sfd(f_m, f_r)$ hvis n = km+r (benyt opgave 13, opspalt $f_{km+r}$). Vis, ved at fortsætte med en sådanne omskrivninger, følgende smukke formel:

$$sfd(f_m, f_n)=f_{sfd(m, n)}$$

(brug Euklid's algoritme på m og n (se appendiks), dvs. anvend kædebrøksprincippet på m og n (istedet for på de geometriske liniestykker A og B), da er den sidste rest r forskellig fra 0 netop sfd(m, n), hvis den næstsidste rest er r', er r' = k'r, derfor er $sfd(f_{r'}, f_r) = f_r$, vis at de succesive omskrivninger ender med denne ligning).]*

Et Fibonaccital er kun sjældent et primtal, men for ethvert primtal findes et Fibonaccital som indeholder dette som primfaktor (ikke svært at vise), og for ethvert nyt Fibonaccital "introduceres" (mindst) et nyt primtal, bortset fra 1, 8 og 144 (meget vanskeligt at vise). Prøv af opspalt de første Fibonaccital i primfaktorer og studér dette fænomen.

**4** Studér pentagrammet og vis at relationen mellem en side (S) og en diagonal (D) kan illustreres således




Du skal altså vise at der er vinkel- og sidelighed de viste steder. Den største og den mindste trekant er altså ensvinklede. Vis at S/D = (D - S)/S (irrationale tal), og at hvis g = D/S da er g = 1 + 1/g, samt at dette g er identisk med g i opgave 3.

**5*** Vis at hvis et par af to på hinanden følgende tal i Fibonaccirækken er et talpar i spillets række, da vil det næste par af to på hinanden følgende tal også være et talpar i spillets række, og dets nummer vil være det sidste tal i det første par (benyt opgave 2).

Vis at Hippias' anden talteoretiske måde at danne spillets række på (side 11) er korrekt hvis der kun er een streg (benyt induktion, dvs. vis at måden er korrekt hvis stregen er under det første 1-tal og at *hvis* måden er korrekt for en given streg på en ulige plads, så er den også korrekt for stregen på den næste ulige plads).

Vis at måden er korrekt generelt (meget vanskelig! - syntes umulig at vise ved induktion). Opspaltningen af et tal n fås således: sidste streg (altså stregen længst til højre) sættes under det største Fibonaccital f ≤ n, næste streg sættes under der største Fibonaccital ≤ n-f, osv., hvis den første streg er på en lige plads erstattes den med streger under hveranden af de foregående Fibonaccital (en streg under 8 svarer altså til $\underline{1}$ 1 $\underline{2}$ 3 $\underline{5}$ 8 ...). At spillets række kan konstrueres på denne måde blev opdaget af *Carlitz*, *Scoville* og *Hoggatt* i 1972.

**6*** Egenskaben i opgave 2 (altså at aS < nD < (a+1)S medfører (2a+n)S < (a+n) D < (2a+n+1)S for alle n, a) er faktisk ensbetydende med $g^2 = g+1$. Vis, ud fra

$g^2 = g+1$, at egenskaben har en "omvending" således at den ialt kan formuleres: Hvis (a, b) er et talpar i spillets række, da er (c, c+b) et talpar i spillets række hvis og kun hvis $a+b = c$ (vink: 1. hvilke numre har talparrene (a, b) og (c, c+b)? 2. (a, b) er et talpar i spillets række => $(b-a)g = a+\varepsilon$ (hvor $0< \varepsilon <1$) => $bg = a+b+\varepsilon(2-g)$ (beviset kan formuleres meget kort, men der kræves lidt snedighed), da imidlertid $0 < \varepsilon(2-g) < 1$ følger konklusionen).

Et talpar i spillets række kaldes *primitivt* hvis dets nummer forekommer som første tal i et foregående talpar, eks.: (9, l5) (nr. 6, første tal i (6, 10)). Vis at hvis vi ud fra et sådant talpar danner en "Fibonacci"-række:

9 15 24 39 63 99 ....,

da vil talparrene (24, 39), (63, 99), ... også være talpar i spillets række, og at omvendt ethvert talpar i spillets række vil fremkomme på denne måde ud fra et entydigt bestemt primitivt talpar (dette er egenskaben som er omtalt på side 11).

**7** I det følgende betegner [x] den *hele* del af tallet x, altså det største hele tal ≤ x (eks.: [17,987]=17).

Lad A og B være to *rationale* tal større end 1 og således at

$$1/A + 1/B = 1.$$

(eks.: A = 34/21 og B = 34/13). Vis at de to talrækker

$$[nA] \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

og

$$[nB] \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(i eksemplet er første række 1 3 4 6 8 ..., og anden række 2 5 7 10 13 ...) "næsten kompletterer" hinanden, forstået på den måde at ethvert naturligt tal enten forekommer i den ene eller i den anden række, men ikke i begge - der er dog en uregelmæssighed (lille - forudsat at A og B har store tællere og nævnere), idet visse tal optræder i begge rækker og andre tal ikke optræder i nogen af rækkerne. Studér et specialtilfælde (med lommeregneren), og find ud af hvor uregelmæssighederne er.

*[Bevis dette fænomen. Vink: Lad t være et naturligt tal og antag at A = p/q (uforkortelig), da er B = p/(p-q) og der gælder:

1. A-rækken er heltallig i t (dvs. t = aA, a naturligt tal) <=> B-rækken er heltallig i t, i så fald er t et multiplum af p og hvis t = aA = bB er t = a+b,

2. hvis t ikke forekommer i A-rækken, da forekommer det i B-rækken, medmindre A-rækken (og dermed B-rækken) er heltallig i t+1,

3. hvis t forekommer i B-rækken, da forekommer det ikke i A-rækken, medmindre B-rækken (og dermed A-rækken) er heltallig i t.

1 er let at vise. 2 og 3 følger af 1 og af at for t = a+b (og dermed t+1 = (a+1)+b) gælder aA < t <=> t < bB og (dermed, idet A og B bytter rolle) t+1 < (a+1)A <=> bB < t+1 - i 2 skal a vælges størst således at aA < t og i 3 skal b vælges mindst således at t ≤ bB.]*

Argumentér for at hvis A og B er *irrationale*, da vil de to talrækker præcis komplettere hinanden (dette blev opdaget af *Beatty* i 1926).

Sæt nu A = g. Vis at B = g+1 og at spillets række af talpar netop er "sammensætningen" af de to ovennævnte talrækker (følger af Hippias allerførste måde at danne rækken på, se første del af opgave 2). Spillets række *har* altså de tre egenskaber som vi forudsatte i opgave 1, vi har hermed bevist at rækken af talpar er vinderstrategi for spillet.

Vis at Hippias' første talteoretiske række (side 10) *er* spillets række.

Antag nu at liniestykker altid var indbyrdes kommensurable. Da var g (= S/D) altså et rationalt tal p/q, og det måtte gælde at p korte fliser ville nå præcis lige så langt som q lange fliser. Betingelsen 1/A+1/B = 1 (A = g og B = g+1) kan ikke mere være præcist opfyldt, men Hippias' argument på side viser at der fortsat vil være en uregelmæssighed. Enhver "geometrisk" konstrueret række af talpar kunne altså kun blive en *tilnærmelse* til spillets række. Denne mulighed foreligger indtil det er blevet bevist at der findes liniestykker D og S således at 1/A+1/B = 1 er opfyldt for A = D/S og B = A+1. Ligningen indebærer at D og S er inkommensurable, og at D/S er forholdet mellem diagonalen og siden i et pentagram. Men indtil denne egenskab ved "de gyldne fliser" er blevet bevist, er Hippias allerførste måde at danne rækken på (oraklets gåde) kun en tilnærmelse til spillets række. Heraf Athenes ord.

**8*** Hvormange korte fliser kan der ligge langs en væg i pentagonsalen?

**9** Oversæt Hippias' første kædebrøk (side 20) til nutidigt tegnsprog og vis ved hjælp af figuren i opgave 4 at den er korrekt, dvs. at når D/S udregnes ved antanairesis vil alle k-erne være lig 1 (se appendiks - med betegnelserne i figuren der er A = D og B = S, vis at B er indeholdt een gang i A og A'/B' = B/(A-B) = A/B, altså er B' indeholdt een gang i A' og A'/B' = A/B => (A'-B')/B' = (A-B)/B => B''/A'' = B/A => A''/B'' = A/B, altså er B'' indeholdt een gang i A'' og A''/B'' = A/B => B'''/A''' = A/B, osv.). Bemærk at kædebrøken også følger af at $g = 1+1/g$.

**10** Vis at forholdet mellem tilsvarende liniestykker (f.eks. sider) i på hinanden følgende pentagrammer (side 16) er $1/g^2$.

Vis at den korteste vej fra et hjørne til centrum i pentagonsalen langs (uendelig mange) linier i pentagrammerne netop er længden af en væg (benyt at $1 + k + k^2 + \ldots = 1/(l-k)$ for $|k| < 1$ med $k = 1/g^2$, eller argumentér geometrisk).

**11** Vis at

$$f_{n-1}f_{n+1} = f_n^{\,2} + (-1)^2$$

for n = 2, 3, 4, ... (sæt $H_n = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^{\,2}$ og vis at $H_2 = 1$ og at $H_{n+1} = -H_n$, du har da vist at formlen er korrekt for n = 2 og at den er korrekt for n+1 *hvis* den er korrekt for n).

**12** Vis at $f_{n+1}/f_n < g$ for n ulige og $g < f_{n+1}/f_n$ for n lige, og at

$$|f_{n+1}/f_n - f_n/f_{n-1}| = 1/f_{n-1}f_n$$

(benyt opgave 11). Vis at talfølgen $f_{n+1}/f_n$ (n = 1, 2, 3, ...) er en fundamentalfølge. Den har derfor en entydigt bestemt grænseværdi, den har vi kaldt g. Vis at

$$|f_n - f_{n-1}g| < 1/f_n$$

og at Pythagoras påstand på side 19 er korrekt.

**13** Vis at $\sum f_i(f_{2n+1}/f_{2n} - f_{i+1}/f_i)$ (sum over i ulige < 2n) = 1 (i ligningen $f_{2n}f_{2n+1} = f_{2n+1}f_{2n}$ indsættes sumudtrykket for $f_{2n}$ og $f_{2n+1}$ (opgave 3) i henh. venstre og højre side). Argumentér for at

$$\sum f_i(x - f_{i+1}/f_i) \text{ (sum over i ulige)} = \begin{matrix} \infty \text{ for } x > g \\ 1 \text{ for } x = g. \\ -\infty \text{ for } x < g \end{matrix}$$

**14** Lad n være et naturligt tal. n forskelige objekter stilles på rad og række. Vi tillader nu ombytninger af naboobjekter (eks.: n = 5, oprindelig række: 15423, række med ombytninger: 15432 eller 51243). Vis at der på denne måde, ved hele tiden at udgå fra den oprindelige række, kan dannes ialt fn+1 rækker (den oprindelige række er inkluderet)(benyt induktion, dvs. vis at dette er rigtigt for n = 1 og at det er rigtigt for n+1 *hvis* det er rigtigt for n - bemærk at antallet af ombytninger er lig antallet af ombytninger hvor sidste objekt bliver stående plus antallet af ombytninger hvor de to sidste objekter bytter plads).

Vis ved hjælp af denne egenskab ved fn at

$$f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_nf_{n+1}$$

altså specielt

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}).$$

*[Vis at hvis m går op i n da går $f_m$ op i $f_n$ (skriv n = km og benyt induktion mht. k).]*

**15** Bemærk at i talrækken $f_n$ (n = 1, 2, 3, ...) er kvadratet på et tal næsten lig produktet af dets to nabotal (opgave 11). Men en talrække hvor denne betingelse præcis er opfyldt er en kvotientrække, dvs. en talrække af formen $ak^n$ (n = 0, 1, 2, ...). Så fn er altså næsten en kvotientrække, dvs. der syntes at være en ganske bestemt kvotientrække som nærmer sig mere og mere til rækken $f_n$. Vi skriver dette $f_n \approx ak^n$. Kvotienten k skal være g, da $f_{n+1}/f_n$ nærmer sig mere og mere til g. Men hvad skal det første tal a være? (lad som om at $f_n = ag_n$, og indsæt dette i formlen $f_{n-1} + f_{n+1} = f_{2n}/f_n$ (opgave 14), og slut heraf at noget kunne tyde på at a(g+1/g) = 1). Efterprøv formlen. Find $f_{25}$ ved hjælp af en lommeregner.

**16** Vis at de to kvotientrækker

$$1 \qquad g \qquad g^2 \qquad g^3 \qquad \ldots$$

og

$$1 \qquad -1/g \qquad (-1/g)^2 \qquad (-1/g)^3 \qquad \ldots$$

begge har den egenskab at et givet tal er summen af de to foregående. Derfor må rækken $f'_n = ag^n + b(-1/g)^n$, n = 0, 1, 2, ... (a og b vilkårlige tal) have den samme egenskab (eks.: a = b = 1, vis at rækken må se således ud: 2 1 3 4 7 11 ...). Find to tal a og b således at a+b = 0 og ag+b(-1/g) = 1 og vis at $f_n = f'_n$, altså

$$f_n = ag^n + b(-1/g)^n$$

(*Binét's* formel, 1843). Vis at formlen for $f_n$ i opgave 15 er korrekt.

**17*** Argumentér for at

$$\sum f_{nj+1} t^n \text{ (sum over } n \geq 0) = 1/(1-t-t^2)$$

for t tilhørende et vist interval ]a, b[, find a og b? (gang nævneren på højre side over på venstre side og benyt definitionen af $f_n$). Find

$$\sum f_n/2^n \text{ (sum over } n \geq 0) \text{ og } \sum (-1)^n f_n/2^n \text{ (sum over } n \geq 0).$$

Vis at

$$f_{n+1} = (n:0) + (n-1:1) + (n-2:2) + \ldots + (n-i:i) + \ldots \text{ så længe } i \leq n-i,$$

her er (n:m) koefficienterne i binomialformlen $(a+b)^n = \sum(n:i)a^{n-i}b^i$ (sum over i fra 0 til n) (skriv $1/(1-t-t^2)$ som summen af en uendelig kvotientrække, husk at $1 + k + k^2 + k^3 + \ldots = 1/(1-k)$) og sammenlign rækken med $\sum f_{n+1}t^n$ (sum over $n \geq 0$).

**18*** Hvordan ser det kugleformede legeme der er omtalt på side 20 ud? Hvormange hjørner har det? Der kan indskrives en terning i det - hvordan skal den ligge? Vis, ved hjælp af denne terning, at kædebrøken for forholdet mellem diameteren i kuglen og diagonalen i femkanterne er korrekt (find dette forhold ved hjælp af Pythagoras læresætning og vis at hvis h er dette tal + 1, da er h = 2+1/(1+1/h)).

**19*** Vis at Hippias' første påstand om figuren på side 20 er korrekt (benyt at forholdet mellem tilsvarende liniestykker i på hinanden følgende femkanter er $1/g^2$, samt formlen for summen af en uendelig kvotientrække). Omkredsen af hver af disse figurer er en polygon og disse vil nærme sig mere og mere til en bestemt punktmængde. Et punkt i denne vil vi kalde *endeligt* hvis det ligger på en af polygonerne, i modsat fald vil vi kalde det et *grænsepunkt*. Til et endeligt punkt kan man knytte et (entydigt bestemt) "ordenstal" n (=0, 1, 2, ...), hvordan? Vis at for n = 2, 3, ... er "længden" af alle n-te ordens punkter lig med $3/g^2$ gange længden af alle (n-1)-te ordens punkter (du kan se dette uden at regne). Hvorfor vokser omkredsen af polygonerne mod det uendelige? Foretag en udmåling på tegningen og vis at for n = 144 overstiger omkredsen af figuren jordens omkreds (benyt formlen for summen af en endelig kvotientrække).

Vis at der til ethvert grænsepunkt svarer et punkt på en femkant, og omvendt (og således at "rækkefølgen" af punkterne bevares) (vink: 1. til et grænsepunkt kan knyttes en side i femkanten og en uendelig følge af tal $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., hvor $a_n$ Î {1,2,3}, og omvendt, 2. til en sådan følge svarer et punkt på siden af femkanten, og omvendt, vi finder punktet ved succesiv tre-deling af siden). Et delingspunkt ved en $3^n$-deling af en side i femkanten vil dog svare til to forskellige grænsepunkter, hvilke? Visse grænsepunkter kunne man kalde "rationale" (eller "periodiske"), hvordan vil du beskrive disse?

**20*** Denne opgave er for forskeraspiranten. Goldbach's formodning (omkring 1740) siger at "ethvert lige tal kan skrives som summen af to primtal", f.eks. 18 = 5+13. Denne påstand er aldrig blevet bevist, og *kan* formentlig ikke bevises på grundlag af det vedtagne aksiomsystem. Følgende problem er inspireret af Goldbach's formodning: "ethvert naturligt tal kan skrives som summen af et a-tal og et b-tal", f.eks. 18 = 8+10. Når man skal løse et sådant problem starter man naturligvis med en computerundersøgelse. Lav et program som succesivt for ethvert naturligt tal n optæller hvor mange par (i, j) (i,j > 0) der findes således at $n = a_i + b_j$, vi kalder dette antal $t_n$. Du vil opdage et for nogle n er $t_n = 0$, vores formodning er altså forkert, men rækken af de n-er for hvilke $t_n = 0$ har en letgenkendelig struktur. Det samme gælder rækken af de n-er for hvilke $t_n = 1$, rækken af de n-er for hvilke $t_n = 2$, osv. Det viser sig at de n-er for hvilke $t_n = k$ består af rækker af n-er som hver især har den egenskab at når man kender to på hinanden følgende n-er kan man let finde alle de følgende.

Der er altså let at se en vis struktur i rækken $t_1$, $t_2$, $t_3$, ..., men den komplette struktur syntes at være kompliceret, og spørgsmålet er om den overhovedet kan beskrives. Her er hvad jeg indtil nu er nået frem til.

Ud fra a-rækken: 0 1 3 4 6 8 9 11 ..., kan vi danne en række af 0-er og 1-taller: 0 1 0 1 1 0 1 ..., 0 når differensen mellem på hinanden følgende a-tal er 1 og 1 når differensen mellem på hinanden følgende a-tal er 2. Ud fra denne række kan vi danne følgende to rækker:

0 3 6 8 11 13 16 19 21 24 27 29 ... (A)

og

1 2 4 6 7 9 10 12 14 15 17 19 ...,

disse adderes

1 5 10 14 18 22 26 31 35 39 44 48 ... (B)

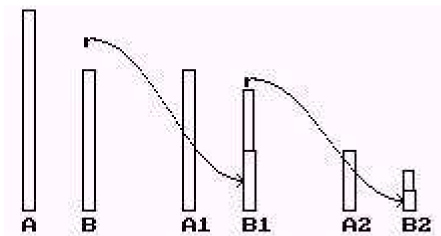
Den række af n-er hvor tn=0 starter i det første tal i A-rækken og det næste tal er det første tal i B-rækken. Den række af n-er hvor $t_n$ = 1 starter i det andet tal i A-rækken og det næste tal er det andet tal i B-rækken. Den række af n-er hvor tn=2 starter i det tredie tal i A-rækken og det næste tal er det tre-die tal i B-rækken. Men herefter begynder der at opstå komplikationer. For det første svarer de følgende rækker vi danner på denne måde ikke til t = 3, 4, 5, ..., men til t=4, 4, 4, 8, 7, 9, 10, 8, 14, 12, 12, 18, 14, ... For det andet er det allerførste tal i disse rækker af og til forskelligt fra de følgende. F.eks. begynder den første række med 4-taller med et 3-tal.

**Appendiks: Kædebrøker**

Vi ved ikke om der i oldtiden har forekommet noget som svarer til vore uendelige kædebrøker (jvf. Hippias kædebrøker på side 20), vi ser dem først fra omkring år 1600, men kædebrøksprincippet har været kendt. Forestil dig at du har to pinde A og B og at du skal finde forholdet mellem deres længder - men at du intet redskab har udover at du kan afsætte mærker på pindene. Du kan da først finde ud af hvor mange hele gange B er indeholdt i A - dette antal kaldes k1. Der bliver muligvis en rest som er mindre end B. Du kan dernæst finde ud af hvor mange hele gange denne rest er indeholdt i B - dette antal kaldes k2. Der bliver muligvis igen en rest som er mindre end den første rest. Du kan dernæst finde ud af hvor mange hele gange denne sidste rest er indeholdt i den foregående rest - dette antal kaldes k3. Osv. Efter et antal (n) gange er den sidste rest i praksis lig med 0. Længden af A i forhold til B er da givet ved *kædebrøken*

$$k_1 + 1/(k_2 + 1/(k_3 + 1/(k_4 + 1/( \ldots + 1/k_n)\ldots))).$$

Eks.:




A/B = 1+r/B = 1+1/(B/r) = 1+1/(A'/B') = 1+1/(2+(r'/B')) = 1+1/(2+1/(B'/r')) = 1+1/(2+1/(A''/B'')) = 1+1/(2+1/3)) = 1+3/7=10/7.

Bemærk at hvis processen ender, er den sidste rest (≠ 0, altså r' i figuren) netop er det største liniestykke som er indeholdt et helt antal gange i *både* A og B.

Denne fremgangsmåde er - i hvert fald når det gælder det simpleste tilfælde n=2 - ældgammel. *Aristoteles* omtaler den og kalder den *antanairesis* (vekselvis borttagning). Under navnet *Euklids algoritme* bruges den til at finde den *største fælles divisor* for to naturlige tal A og B (altså det største naturlige tal som går op i både A og B) - denne er ifølge bemærkningen den sidste rest ≠ 0. Eks.: sfd(30, 21) = 3 (da 30/21 = 10/7 får vi de samme k-er som ovenfor, men den sidste rest er nu et tal, nemlig 3).

Hvis de to liniestykker A og B er inkommensurable vil ingen rest blive 0, og processen kan altså fortsættes i det uendelige. Tilfældet hvor A og B er diagonalen og siden i et pentagram, er det tilfælde hvor antanairesis lader sig udføre med simplest mulige geometriske overvejelser (opgave 9). Det er derfor sandsynligt at inkommensurabiliteten af disse liniestykker er opdaget ved udregning af deres forhold ved antanairesis. Muligvis har *Theodoros* brugt antanairesis i sine beviser for at √n for visse n er irrationalt (han ville da have bemærket en gentagelsesstruktur i talrækken $k_1$, $k_2$, $k_3$, ..., jvf. Hippias's kædebrøker, dette skyldes at tallet er "kvadratisk").

Kædebrøken ovenfor noteres $[k_1, k_2, k_3, ..., k_n]$, ki er naturlige tal, $k_1$ kan dog være 0.

Enhver kædebrøk - endelig $[k_1, k_2, k_3, ..., k_n]$ eller uendelig $[k_1, k_2, k_3, ...]$ - bestemmer et positivt reelt tal x. Tallet x er rationalt hvis og kun hvis kædebrøken er endelig.

Hvis kædebrøken er endelig findes x således: sæt x=kn, og gør følgende fra i = n-1 ned til i = 1: "udregn $k_i$+1/x og kald dette tal x".

Hvis kædebrøken er uendelig, er talfølgen $a_n = [k_1, k_2, k_3, ..., k_n]$ (n = 1, 2, 3, ...) en fundamentalfølge (hvis nemlig $a_n = p_n/q_n$ (uforkortelig) vil $q_n$-erne vokse mod uendelig og $|a_m - a_n| < 2/q^2$, hvor q er det mindste af tallene $q_m$ og $q_n$), den bestemmer derfor et reelt tal x, og x kan ikke være rationalt ($a_n$-erne nærmer sig nemlig til x således:

$$a_1 < a_3 < a_5 < ... < x < ... < a_6 < a_4 < a_2,$$

og *enhver* brøk i intervallet $]a_n, a_{n+1}[$ har nævner større end $q_n$).

Eks.: Lad os udregne [1, 2 ,2, 2, 2], altså

$$1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + 1/2))).$$

Vi får følgende x-er: 2+1/2 = 5/2, 2+1/(5/2) = 12/5, 2+1/(12/5) = 29/12 og 1+1/(29/12) = 41/29. Hvis vi kvadrerer dette tal får vi 1.99881.... Den uendelige kædebrøk [1, 2, 2, 2, ...] fremstiller altså nok √2. Hvis vi kalder kædebrøkens tal x, ser vi at x+1 = 2+1/(2+1/(2+1/(2+1/(2+...)))). Men da tallet i den yderste parentes er lig hele tallet på højre side, som igen er lig x+1, ser vi at

$x+1=2+1/(x+1)$, altså $(x+1)^2=2(x+1)+1$ eller $x^2=2$.

Omvendt kan ethvert positivt reelt tal x skrives entydigt på kædebrøksform (der bliver dog en lille tvetydighed når tallet er rationalt). k-erne i kædebrøksudviklingen for x fås ved succesivt at gøre følgende[6]: "k = [x], udregn 1/(x-k) og kald dette tal x" (dette skrives x := 1/(x-k)).

Eks.: For tallet π er lyder proceduren:

[π] = 3  x := 1/(π-3)  (x = 7,06251...)

[x] = 7  x := 1/(x-7)  (x = 15,99659...)

[x] = 15  x := 1/(x-15)  (x = 1,00341...)

[x] = 1  x := 1/(x-1)  (x = 292,65471...)

[x] = 292  osv.,

altså π = [3, 7, 15, 1, 292, ...].

Hvis vi udregner denne del af den uendelige kædebrøk (som ovenfor) får vi: 293/292, 4687/293, 33102/4687, 103993/33102 = 3,141592653..., dette tal afviger mindre end 0,000000001 fra tallet π. Bemærk at [3, 7] = 3+1/7 = 22/7.

Kædebrøker er nemme at sammenligne (hvordan? - prøv med nogle simple eksempler), men regneoperationerne (addition og multiplikation) kræver omskrivning til f.eks. almindelig brøk eller decimalbrøk.

Lad $x = [k_1, k_2, k_3, ...]$ og definer talfølgerne $p_n$ og $q_n$ (n = 0, 1, 2, ...) således: $p_0 = 1$, $p_1 = k_1$, $p_n = p_{n-1}k_n + p_{n-2}$ (for n = 2, 3, ...) og $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, $q_n = q_{n-1}k_n + q_{n-2}$ (for n = 2, 3, ...), da gælder: $a_n = [k_1, k_2, k_3, ..., k_n] = p_n/q_n$ og $p_n/q_n - p_{n+1}/q_{n+1} = (-1)^n/q_nq_{n+1}$ (sml. opgave 11), derfor er $x = k_1 + 1/(q_1q_2) -1/(q_2q_3) + 1/(q_3q_4) - ....$

6 For et tal x, betegner [x] - eller int(x) (integer) - den *hele* del af x, altså det største hele tal ≤ x, eks.: [17,987]=17.