Niels-Henrik Aphel

Omvendingsformler for Potensrækker

Riemanns metode og cirkelmetoden

Niels-Henrik Aphel: Omvendingsformler for Potensrækker
Illustrationer og opsætning: Niels-Henrik Aphel

Forside og bagside er fra Julius Petersen: Forelæsninger over Funktionsteori, 1895. Som det fremgår af forsiden, er forfatteren ikke helt på det rene med Riemanns hypotese.

Der kan frit kopieres fra bogen

Indledning

Litteratur

Indledning

Når man skal udlede en formel for en talteoretisk funktion - som for eksempel π_n, der er antallet af primtal mindre end n, eller ν_n, der er antallet af måder hvor på n kan skrives som en sum af to primtal - så benytter man oftest den komplekse funktionsteori, idet man danner den til funktionen hørende potensrække og finder en omvendingsformel for denne. For funktionen c_n er potensrækken $\sum c_n x^n$, og hvis den har positiv konvergensradius, er c_n givet ved Cauchys integralformel

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0. Indføres variabeltranformationen $x = e^{-y}$, bliver $\sum c_i x^i$ en funktion G(y) af y, og man kan få en formel for G(y), og dermed en formel for c_n, ved at danne *zetafunktionen* Z(s) til potensrækken. Ad denne vej udledte Riemann en eksakt formel for π_n, og et halvt århundrede senere udledte Hardy & Littlewood en tilnærmelsesformel for ν_n.

Riemann beviste ikke sin formel for π_n, den blev første bevist 40 år senere. Hardy & Littlewoods tilnærmelsesformel for ν_n kan måske ikke bevises, thi et bevis for den ville være et bevis for Goldbachs formodning. I begge tilfælde er potensrækken et produkt af to potensrækker, men i første tilfælde er den ene af disse potensrækker ganske simpel, nemlig $\sum x^n$, derfor kan udregningerne for π_n føres helt igennem og formlen kan bevises at være korrekt. Potensrækken for ν_n derimod, er *svingende* asymptotisk, derfor findes kun en tilnærmelsesformel.

Hvis p_n er funktionen af n defineret ved $p_n = 1$ for n primtal og ellers 0, er π_n og ν_n givet som koefficienterne i produktpotensrækkerne

$$\sum \pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum p_n x^n)$$

og

$$\sum \nu_n x^n = (\sum p_n x^n)^2.$$

For to formale potensrækker $\sum f_i x^i$ og $\sum g_j x^j$ er koefficienten $(f, g)_n$ i deres produkt lig $\sum f_i g_{n-i}$ $(i < n)$. Hvis $i_n \equiv 1$, har vi altså $\pi_n = (i, p)_n$ og $\nu_n = (p, p)_n$.

Lad σ_n være summen af n's primfaktorer med multiplicitet - σ_n opfylder altså logaritme-betingelsen $\sigma_{mn} = \sigma_m + \sigma_n$. Funktionen $(i, \sigma)_n$ betegnes b_n, og den er beslægtet med π_n, idet den er en *sumrække*, funktionen $(p, \sigma)_n$ betegnes a_n, og den er beslægtet med ν_n.

Vi har altså $a_n = \sum\sigma_{n-p}$ (p primtal $< n$) og $b_n = \sum\sigma_i$ $(i < n)$, eller:

$$\sum a_n x^n = (\sum p_n x^n)(\sum \sigma_n x^n)$$

og

$$\sum b_n x^n = (\sum x^n)(\sum \sigma_n x^n).$$

Goldbachs formodning siger at $\nu_n > 0$ for n lige, denne "kendsgerning" er beslægtet med denne ulighed:

$$b_n/n < a_n/\pi_n \text{ for n lige}$$

- og n tilstrækkelig stor. Uligheden kan formuleres således: "middelværdien af tallene σ_i $(i < n)$" < "middelværdien af tallene σ_{n-p} (p primtal < n)".

Foruden formlerne for disse funktioner vil vi udlede et utal af andre af talteoriens formler.

Tak til min vejleder, Gert Buschmann, for at have vist hvordan min teori for a_n- og b_n-rækkerne kan sættes ind i en større sammenhæng.

De talteoretiske funktioner $\mu(n)$ og $\phi(n)$

Möbius' funktion $\mu(n)$ defineres ved $\mu(n) = (-1)^r$ hvis n er produktet af netop r *forskellig*e primtal og ellers 0 (altså hvis en primfaktor optræder i en højere potens). For $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum \mu(d) \text{ (d divisor i n)} = 1 \text{ for } n = 1 \text{ og ellers } 0.$$

Af denne egenskab følger at hvis

$$F(x) = \sum 1/m\ f(mx) \quad (m > 0)$$

da er

$$f(x) = \sum \mu(n)/n\ F(nx) \quad (n > 0)$$

- forudsat konvergens naturligvis - det vises ved indsætning. Hvis $f(x) = \sin x$ er $F(x)$ savtakfunktionen med perioden 2π og med $F(0) = \pi/2$ og $F(\pi) = 0$, og vi har at $\sin x = \sum \mu(n)/n\ F(nx)$, altså savtakken plus formindskede udgaver og hvor nogle skal omvendes.

Eulers funktion $\phi(n)$ defineres ved $\phi(n) = \#((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$, altså antallet af elementer i gruppen af invertible elementer i restklasseringen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, eller sagt med andre ord: antallet af h = 1, 2, ..., n - 1 der er primiske med n. For n og m primiske er $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$, for p primtal er $\phi(p^{r+1}) = p^r(p - 1)$, og $\phi(2p) = \phi(p) = p - 1$.

Hvis ε er en primitiv n-te rod af enheden ($\varepsilon^n = 1$ men $\varepsilon^m \neq 1$ for $m < n$), er

$$\sum_{j \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \varepsilon^j = \mu(n).$$

Hvis vi sætter $e(x) = e^{x2\pi i}$, kan en n-te rod af enheden skrives $\varepsilon = e(j/n)$, at den er primitiv betyder at $j \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Euler-Maclaurins sumformel

Det n-te *Bernoulli-polynomium* $B_n(x)$ er det entydigt bestemte polynomium der opfylder

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = x^n.$$

De første er $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - 1/2$, $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$, $B_3(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$. $B_n(x)$ er af n-te grad og der gælder:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

$$B_n(2x) = 2^n(B_n(x) + B_n(x+1/2))/2.$$

Det n-te *Bernoullital* B_n er $B_n(0)$. Disse tal er givet rekursivt ved $B_0 = 1$ og

$$1 + \binom{k}{1}B_1 + \binom{k}{2}B_2 + \ldots + \binom{k}{k-1}B_{k-1} = 0.$$

De første er $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, ... De ulige bortset fra B_1 er 0 og de lige veksler fortegn og *vokser* numerisk efter B_6: for n stor er $B_{2n} \approx (-1)^{n+1}2(2n)!/(2\pi)^{2n}$ (side 13).

Lad f(x) være en funktion som er tilpas ofte kontinuert-differentiabel i intervallet [a, b] og lad $N \varepsilon \mathbb{N}$ og sæt $h = (b - a)/N$. Da får vi ved at anvende partiel integration på integralet at

$$h \sum_{i=0}^{N-1} f'(a + ih) = f(b) - f(a) + (-1/2)h(f'(b) - f'(a))$$

$$+ \int_a^b B_1((t - a)/h) - [(t - a)/h])f''(t)\, dt.$$

Og hvis vi fortsætter med at anvende partiel integration og udnytter egenskaberne for $B_n(x)$ (bland andet at $B_n = 0$ for n ulige > 1), får vi

$$h \sum_{i=0}^{N-1} f'(a + ih) = \sum_{n=0}^{M} (B_n/n!)h^n(f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)) + R_M$$

hvor restleddet er givet ved

$$R_M = (-1)^{M+1}/M! \int_a^b B_M((t - a)/h) - [(t - a)/h])f^{(M+1)}(t)\, dt.$$

Leddene i rækken behøver ikke nødvendigvis at aftage, de kan vokse for store n, da B_n vokser. Sålænge leddene er aftagende er R_M numerisk af mindre størrelsesorden end det første led der bortkastes. Da $R_{2n} = R_{2n+1}$ kan vi forudsætte M ulige. Da er $B_M((t - a)/h) - [(t - a)/h])$ oscillerende, idet $B_{2n+1}(1 - x) = -B_{2n+1}(x)$ og $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = 0$, så hvis $f^{(M+1)}(t)$ er monoton kan man let give en vurdering af R_M. Vil man have større nøjagtighed må man ofte ændre et af endepunkterne for summeringen (a eller b) således at $f^{(n)}(a)$ eller $f^{(n)}(b)$ bliver numerisk mindre (se de to næste §§).

Hvis rækken $\sum f^{(n)}(a)(B_n/n!)x^n$ har positiv konvergensradius r, er $\sum f'(a + ih)$ $(i \geq 0)$ konvergent for $|h| < r$ og

$$-h \sum_{i=0}^{\infty} f'(a + ih) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)h^nB_n/n!$$

Det er mest nærliggende anvende denne formel på $f(x) = e^{-x}$ og a = 0 (vi sætter h = y):

$$y/(e^y - 1) = \sum B_n/n!\ y^n$$

da $e^{-y} + e^{-2y} + ... = 1/(e^y - 1)$. Den kan tjene til definition af B_n. Vi vil sætte $\alpha_n = B_{n+1}/(n+1)!$, og har da

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/e^{ny} = 1/y + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, y^i$$

som kan generaliseres til

$$1/m! \sum_{n=1}^{\infty} (ny)^m/e^{ny} = 1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i.$$

Da $1/(e^y - 1) = 1/2 \coth(y/2) - 1/2 = \sum 1/(y + k2\pi i) - 1/2$ (sum over $k\ \varepsilon\ \mathbb{Z}$) har vi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i) = 1/y + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, y^i$$

som kan generaliseres til

$$y^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i)^{m+1} = 1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i.$$

Gammafunktionen

Gammafunktionen $\Gamma(s)$ kan for $\mathrm{Re}(s) > 0$ defineres ved

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^s/e^t\, dt/t$$

- altså den Fourier-Mellin-transformerede til e^{-t}. Den kan udvides analytisk til hele planen og udvidelsen er meromorf. Polerne for $\Gamma(s)$ er netop punkterne $-m$ ($m\ \varepsilon\ \mathbb{N}_0$), de er alle simple og residuet for polen $-m$ er $(-1)^m/m!$. $\Gamma(s)$ har ingen nulpunkter. For den hele funktion $1/\Gamma(s)$ gælder (for alle s) Hankels integralformel

$$1/\Gamma(s) = 1/(2\pi i) \int_L e^t/t^s \, dt$$

hvor L er en kurve der starter ved -∞, løber under den negative akse, går omkring 0 og fortsætter mod -∞ over den negative akse - y^s er naturligvis defineret som exp(s log y).

Vi har omvendingsformlerne

$$\Gamma(s)/n^s = \int_0^\infty tye^{-nt} \, dt/t$$

og

$$e^{-nt} = 1/(2\pi i) \int_L t^{-s}\Gamma(s)/n^s \, ds.$$

For s ≠ 0, -1, -2, ... gælder produktformlen

$$\Gamma(s) = 1/s \prod_{k=1}^{\infty} ((1 + 1/k)^s/(1 + s/k)).$$

$\Gamma(1) = 1$ og $\Gamma(s)$ tilfredsstiller funktionalligningen $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ - heraf følger at for $n \in \mathbb{N}_0$ er $\Gamma(n+1) = n!$. Endvidere gælder

$$\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \pi/\sin(\pi s) \text{ og } \Gamma(1/2 + s)\Gamma(1/2 - s) = \pi/\cos(\pi s)$$

og

$$2\sqrt{\pi}\, \Gamma(2s) = 2^{2s}\, \Gamma(s)\Gamma(1/2 + s).$$

Af produktformlen får vi en rækkeudvikling af log Γ(s) og hvis vi i denne anvender Euler-Maclaurins sumformel på funktionerne x log x - x (hvis afledede er log x) får vi (Stirlings formel)

$$\log \Gamma(s) = (s - 1/2)\log(s - 1) - (s - 1) + \log(2\pi)/2 +$$

$$\sum_{n=1}^{M} B_{2n}/((2n)(2n - 1)(s - 1)^{2n-1}) + R_{2M}$$

hvor

$$R_{2M} = -\int_0^\infty B_{2M+1}(t - [t])/((2M + 1)(s - 1 + t)^{2M+1})\, dt.$$

Formlen giver bedre resultat jo større |s| er, men rækken er altid divergent, så den kan kun bruges sålænge leddene er aftagende (hvis $s - 1 = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ er fejlen R_{2M} numerisk mindre end $1/\cos(\theta/2)^{2M}$ gange det første led som bortkastes). Når |s| er lille må vi benytte at $\Gamma(s) = \Gamma(s + N)/(s(s + 1)...(s + N - 1))$ - for ethvert $\varepsilon > 0$ kan man altid finde et N således at fejlen ved at bruge formlen er mindre end ε.

Riemanns zetafunktion.

Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ kan for $\mathrm{Re}(s) > 1$ defineres ved

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$$

eller ved produktet

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primtal}} (1 - 1/p^s)^{-1}.$$

Summen og produktet er absolut konvergent og den derved definerede analytiske funktion har meromorf udvidelse, idet der gælder

$$\zeta(s) = -\Gamma(1 - s)/(2\pi i) \int_{-L} (-y)^s/(e^y - 1)\, dy$$

hvor er -L er den modsatte kurve til den ovennævnte kurve L, og her er integralet som funktion af s holomorf i hele planen. Af formlen for $\Gamma(s)/n^s$ (side 11) følger at for $\mathrm{Re}(s) > 1$ er

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty y^s/(e^y - 1)\, dy/y.$$

For $m \in \mathbb{N}$ kan $\zeta(2m)$ findes således: Ifølge side 10 er

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n2\pi i)^{-1} = y^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{m+1}/(m + 1)!\ y^m$$

men vi har også

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n2\pi i)^{-1} = 2/y \sum_{n=1}^{\infty} 1/(1 + (n2\pi/y)^2)$$

$$= 2/y \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (y/n2\pi)^{2m}$$

$$= 2/y \sum_{m=1}^{\infty} (y/2\pi)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2m}$$

altså er $\zeta(2m) = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}B_{2m}/(2(2m)!)$ - specielt er $\zeta(2) = \pi^2/6$. Der findes ingen formel for s ulige.

For s således at $0 < \mathrm{Re}(s)$ og $s \neq 1$ er

$$\zeta(s) = \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{M} 1/n^s - M^{1-s}/(1 - s)\right)$$

da $\sum 1/n^s - \int dy/y^s$ (sum og integration fra 1 til M) konvergerer for $M \to \infty$, og derfor må være $\zeta(s) - 1/(s - 1)$, men $M^{1-s}/(1 - s) = \int dy/y^s$ (integration fra 0 til M) $= 1/(s - 1) + \int dy/y^s$ (integration fra 1 til M). Af dette følger at

$$\lim_{s\to 1} (\zeta(s) - 1/(s - 1)) = \lambda$$

hvor $\lambda = 0{,}5772157...$ - *Eulers konstant*. $\zeta(s)$ har altså simpel pol i $s = 1$ med residuum 1, og dette er den eneste singularitet for $\mathrm{Re}(s) \geq 1$. For $\mathrm{Re}(s) > 1$ har vi også (ved en elementær udregning)

$$\zeta(s)/s = 1/(s - 1) + \int_1^{\infty} y^{-s} (y - [y])\, dy/y$$

som igen viser at $\zeta(s)$ kan udvides til $Re(s) > 0$ og har simpel pol i $s = 1$ med residuum 1. Sættes heri $s = 1/2 + ti$, ses at $\zeta(1/2 + ti)/(1/2 + ti)$ er den Fourier-transformerede til $([e^x] - e^x)/e^{x/2}$.

For $Re(s) \leq 0$ kan $\zeta(s)$ findes ud fra $\zeta(1 - s)$, da $\zeta(s)$ tilfredsstiller en funktionalligning der sammenknytter $\zeta(s)$ og $\zeta(1 - s)$. Sættes

$$\xi_0(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

er

$$\xi_0(s) = \xi_0(1 - s)$$

eller

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cos(s\pi/2)\,\zeta(s)$$

for alle s.

Funktionalligningen følger af Poissons sætning, der siger at hvis funktionen $f(x)$ og den Fourier-tranformerede $f\hat{}(x)$ aftager tilstrækkelig hurtigt for $|x| \to \infty$, da er

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = 1/(2\pi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\hat{}(n).$$

Anvendes denne sætning på $f(x) = 1/(y + ix)^s + 1/(y - ix)^s$ ($Re(s) > 1$ og $Re(y) > 0$) for hvilken $f\hat{}(x) = (2\pi)^s/\Gamma(s)\,|x|^{s-1}/e^{2\pi y|x|}$, fås

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + ki)^s = (2\pi)^s/\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}/e^{2\pi yn}$$

for $Re(s) > 1$ og $Re(y) > 0$. Da højre side er en holomorf funktion af s i hele planen kan venstre side udvides til en holomorf funktion af s i hele planen, og denne $-1/y^s$ har grænseværdi $2\cos(s\pi/2)\zeta(s)$ for $y \to 0$ for $Re(s) > 1$ og derfor for alle s. For $Re(s) < 0$ har venstre side altså grænseværdi $2\cos(s\pi/2)\zeta(s)$ for $y \to 0$, og for $Re(s) < 0$ har højre side grænseværdi $(2\pi)^s/\Gamma(s)\,\zeta(1 - s)$ for $y \to 0$, altså er $2\cos(s\pi/2)\,\zeta(s) = (2\pi)^s/\Gamma(s)\,\zeta(1 - s)$ for $Re(s) < 0$ og dermed for alle s.

Funktionalligningen kan omskrives til

$$\pi^{-si/2}\,\Gamma(1/4 + si/2)\zeta(1/2 + si) = \pi^{si/2}\,\Gamma(1/4 - si/2)\zeta(1/2 - si)$$

hvoraf ses at funktionen $T(t) = \pi^{-ti/2}\Gamma(1/4 + ti/2)\zeta(1/2 + ti)$ er reel når t er reel. Af funktionalligningen følger at for $s \leq 0$ har $\zeta(s)$ nulpunkter i -2m ($m \in \mathbb{N}$) og ikke andre singulariteter end disse. Af funktionalligningen følger endvidere at $\zeta(0) = -1/2$ og $\zeta(-(2m - 1)) = -B_{2m}/(2m)$ for $m \in \mathbb{N}$. I strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ må gælde at hvis ρ er en singularitet da er $\bar{\rho}$, $1 - \rho$ og $1 - \bar{\rho}$ også singulariteter. Det viser sig at der i strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ er uendelig mange nulpunkter (men ingen poler). *Riemanns hypotese* siger at for alle nulpunkterne i strimlen er $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ - de består altså af indbyrdes konjugerede par: $\rho = 1/2 \pm ti$. De første 5 nulpunkter har t = 14,135, 21,022, 25,011, 30,425, 32,935.

Funktionen $\xi(s) = s(s - 1)\xi_0(s)$ er hel og dens nulpunkter er nulpunkterne for $\zeta(s)$ i strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. $\xi(s)$ er faktisk "et polynomium af uendelig orden" idet der gælder

$$\xi(s) = \xi(0) \prod (1 - s/\rho) \quad \text{(produkt over nulpunkterne } \rho \text{ for } \xi(s)).$$

Hvad angår rækkefølgen af faktorerne er det nok blot at tage disse parvis for rødderne ρ og $1 - \rho$, da produktet så er absolut konvergent. Men dette forudsætter dog at tætheden af rødderne, altså nulpunkterne af $\zeta(s)$ i strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, ikke er for stor. Riemann fik tingene til at passe ved at skitsere et bevis for at tætheden af nulpunkterne ved $\mathrm{Im}(\rho) = T$ er tilnærmelsesvist $\log(T/(2\pi))/(2\pi)$. Eller mere præcist: antallet af nulpunkter i området $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, $0 < \mathrm{Im}(s) < T$, er tilnærmelsesvist $(T/(2\pi))(\log(T/(2\pi)) - 1)$, idet den relative afvigelse går mod 0 af størrelsesorden $1/T$ for $T \to \infty$. Riemann skriver blot at integralet af $1/(2\pi i)\ \xi'(s)/\xi(s)$ rundt langs dette område (og det er jo antallet af nulpunkter af $\xi(s)$ i området) er denne talværdi på nær afvigelsen. Dette er korrekt, men det blev først bevist i 1905 af von Mangoldt.

Vi har derfor

$$\log \zeta(s) = -\log(s - 1) + \sum_{\rho} \log(1 - s/\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} (\log(s + 2k) - s(1 + 1/k)/2)) +$$

$$s(\log \pi)/2 - \log 2$$

da $\log \xi(0) = -\log 2$.

Hvis vi anvender Euler-Maclaurins sumformel på $f(x) = x^{1-s}/(1 - s)$ og sætter h = 1, a = N (stort) og b = ∞ får vi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} 1/n^s + N^{1-s}/(s - 1) + N^{-s}/2 +$$

$$\sum_{n=1}^{M} (B_{2n}/(2n)!)s(s + 1)...(s + 2n - 2)/N^{s+2n-1} + R_{2M}$$

hvor

$$R_{2M} = -s(s + 1)...(s + 2M)/(2M + 1)! \int_N^\infty B_{2M+1}(t - [t])/t^{s+2M}\, dt/t.$$

Fejlen R_{2M} vil være numerisk mindre end $|(s + 2M - 1)/(\mathrm{Re}(s) + 2M - 1)|$ gange det første led der bortkastes. Formlen gælder for $\mathrm{Re}(s) > -2M$ - og viser (igen) at $\sum 1/n^s$ kan udvides analytisk. Rækken er altid divergent, men jo større N vælges i forhold til |s| jo større kan M vælges (førend leddene begynder at vokse).

Når man skal studere opførslen af nulpunkterne for $\zeta(1/2 + ti)$ (for eksempel fortegnsvariationer) benytter man oftest den reelle funktion $T(t)/|\Gamma(1/4 + ti/2)|$. Det følger af formlen for gammafunktionen at denne funktion er $\zeta(1/2 + ti)e^{\theta(t)i}$, hvor

$$\theta(t) \approx (t/2)\log(t/(2\pi)) - t/2 - \pi/8 + 1/(48t) + 7/(5760t^3)$$

- fejlen er mindre end $2/t^5$.

Zetafunktionen for en potensrække

Lad $\sum c_n x^n$ være en potensrække hvor der findes et tal $\alpha > 0$ således at $|c_n| < n^\alpha$ for n tilstrækkelig stor. Dette medfører at $\sum c_n x^n$ har konvergensradius ≥ 1. Vi definerer *zetafunktionen* $Z_c(s)$ til $\sum c_n x^n$ ved

$$Z_c(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n/n^s.$$

Denne række er absolut konvergent for Re(s) tilstrækkelig stor, og den herved definerede funktion er derfor analytisk. Hvis den kan udvides analytisk, er udvidelsen ikke nødvendigvis meromorf. For $\sum c_n/n^s$ og et givet $m \varepsilon \mathbb{N}$, defineres for j = 0, 1, ..., m - 1 potensrækkerne $\sum c^j{}_n/n^s$ ved $c^j{}_n = c_n$ for n = j (mod m) og ellers 0, så er $Z_c(s) = \sum Z^j{}_c(s)$ (j < m).

Eksempler

1. **$\sum x^n$: $Z(s) = \zeta(s)$** Zetafunktionen hørende til $\sum x^n = x/(1 - x)$ er Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$. Zetafunktionerne hørende til $\sum x^{2n}$ og $\sum x^{2n+1}$ er henh. $(1/2^s)\zeta(s)$ og $(1 - 1/2^s)\zeta(s)$ - bemærk at den sidste har yderligere nulpunkter i $n2\pi i/\log 2$, n hel.

2. **$\sum (-1)^{n+1}x^n$: $Z(s) = (1 - 2/2^s)\zeta(s)$** Zetafunktionen hørende til $\sum (-1)^{n+1}x^n = x/(1 + x)$ betegnes $\eta(s)$, altså

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^s$$

for Re(s) > 1. $\eta(s)$ er forbundet med $\zeta(s)$ ved $\eta(s) = (1 - 2/2^s)\zeta(s)$ og kan derfor udvides analytisk til hele planen, udvidelsen er endda holomorf - som bekendt er $\eta(1) = \log 2$.

3. **$\sum \mu(n)x^n$: $Z(s) = 1/\zeta(s)$** Rækken $\sum (-1)^{n+1}/n^s$ er konvergent for Re(s) > 0 og den er Abel-summerbar for alle s og Abel-summen er $\eta(s)$. Af egenskaben ved Möbius' funktion $\mu(n)$ følger at $(\sum 1/n^s)(\sum \mu(m)/m^s) = 1$ for Re(s) > 1. Zetafunktionen hørende til $\sum \mu(n)x^n$ er altså $1/\zeta(s)$. Det kan vises at Riemanns hypotese er ensbetydende med at $\sum \mu(n)/n^s$ er konvergent for Re(s) > 1/2 - i så fald er grænseværdien $1/\zeta(s)$.

4. **$\sum x^p$: $Z(s) = \sum \mu(m)/m \log \zeta(ms)$** Zetafunktionen $Z_p(s)$ hørende til potensrækken $\sum x^p = \sum p_n x^n$ er

$$Z_p(s) = \sum_{p \text{ primtal}} 1/p^s$$

for Re(s) > 1. Af produktformlen for $\zeta(s)$ og af $\log(1 - x) = -\sum x^n/n$ for $|x| < 1$ fås

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \, Z_p(ns)$$

for Re(s) > 1. Heraf fås ved Möbius-inversion

$$Z_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \log \zeta(ms)$$

for Re(s) > 1. Da $Z_p(s)$ indeholder logaritmiske bestanddele kan vi ikke forvente at den kan udvides meromorft, men det kan den afledede:

5. **$\sum \log p \, x^p$: $Z(s) = -\sum \mu(m) \log \zeta'(ms)/\zeta(ms)$** Ved differentation af $Z_p(s)$ fås for $Z'_p(s) = -\sum \log p/p^s$:

$$Z'_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$$

for Re(s) > 1. $Z'_p(s)$ er altså en sum af meromorfe funktioner, og den kan udvides analytisk til planen minus den negative talakse.

5. **$\sum \log p\, x^n$ ($n = p^r$): $Z(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$** Lad potensrækken $\sum \Lambda_n x^n$ være givet ved $\Lambda_n = \log p$ hvis $n = p^r$ (p primtal, $r > 0$) og ellers 0. Ved differentation af $\zeta(s) = \prod (1 - 1/p^s)^{-1}$ ses at

$$Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s).$$

6. **$\sum \log p\, x^n$ ($n = p$): $Z(s) = -\sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$** Lad potensrækken $\sum \theta_n x^n$ være givet ved $\theta_n = \log p$ hvis $n = p$ og ellers 0. Da er $Z_{\underline{\pi}}(s) = -Z'_p(s) = -\sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$.

7. **$\sum \sigma_n x^n$: $Z(s) = \zeta(s)\sum mZ_p(ms - 1)$** Zetafunktionen $Z_\sigma(s)$ hørende til potensrækken $\sum \sigma_n x^n$ er for $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$Z_\sigma(s) = \sum_{p \text{ primtal}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} mp/(kp^m)^s$$

altså

$$Z_\sigma(s) = \zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty} mZ_p(ms - 1).$$

$Z_\sigma(s)$ er ikke meromorf, men definitionen af σ_n kan ændres lidt således at dens zetafunktion bliver meromorf:

8. **$\sum \underline{\sigma}_n x^n$: $Z(s) = -\zeta(s)\sum mZ'_p(ms - 1)$** Vi definerer $\underline{\sigma}_n$ ved $\underline{\sigma}_1 = 0$ og $\underline{\sigma}_n = m_1 p_1 \log p_1 + \dots + m_r p_r \log p_r$ hvis n har primfaktorerne $p_1, \dots, p_r$ med multiplicitet $m_1, \dots, m_r$. For $\mathrm{Re}(s) > 0$ er

$$Z_{\underline{\sigma}}(s) = \sum_{p \text{ primtal}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} mp \log p/(kp^m)^s$$

altså

$$Z_{\underline{\sigma}}(s) = -\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty} mZ'_p(ms-1).$$

Formel for c_n

For en potensrække $\sum c_n x^n$ (således at der findes et $\alpha > 0$ således at $|c_n| < n^\alpha$ for n tilstrækkeligt stor) vil vi forsøge at udlede en formel for c_n - evt. blot en tilnærmelsesformel.

Da $\sum c_n x^n$ har positiv konvergensradius følger af Cauchys integralformel at

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0, og heri kan vi, hvis vi indfører variabeltranformationen $x = e^{-y}$, erstatte $\sum c_i x^i = G(y)$ med et integraludtryk indeholdende zetafunktionen Z(s) til $\sum c_i x^i$. Da $\Gamma(s)$ er Fourier-transformationen af e^{-y} er

$$e^{-y} = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\Gamma(s)\, ds$$

for $y \neq 0$ og $a > 0$, og derfor er

$$\sum c_i x^i = G(y) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$

for $\mathrm{Re}(y) > 0$, og hvor $a > 0$ ligger til højre for alle polerne af Z(s). Altså er

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} G(y)e^{ny}\, dy$$

$$= 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} (1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}y^{-s}\, dy)\, \Gamma(s)Z(s)\, ds$$

for $b > 0$.

I denne formel skal man udføre den "endelige" integration

$$1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}y^{-s}\, dy.$$

Men et sådant integral kan ikke udtrykkes ved elementære funktioner, det kan derimod det tilsvarende integral hvor π erstattes med ∞, idet (side 11)

$$1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{ny}y^{-s}\, dy = n^{s-1}/\Gamma(s).$$

Og da dette integral jo er

$$1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s}\right) dy$$

er vi ledt til at forsøge i integralet for G(y) og i formlen for c_n at erstatte y^{-s} med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$, altså at finde en omskrivning af formen

$$G(y) = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int \left(\sum (y + k2\pi i)^{-s}\right) \Gamma(s)Z(s)\, ds + \ldots$$

Rækken $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$ (sum over k ε Z) er (side 14) absolut konvergent for Re(s) > 1 (og Re(y) > 0) og den kan udvides til en *hel* funktion i s, idet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s} = 1/\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}/e^{ny}.$$

I næste § vil vi vise hvilken betingelse $\sum c_n x^n$ skal opfylde for at y^{-s} kan erstattes med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$.

Vi skal først finde zetafunktionen til $\sum c_n x^n$, eller rettere, vi skal finde en funktion Z(s) således at $\sum c_n x^n = G(y)$ kan udtrykkes ved Z(s). Dette kan være nyttigt at erindre hvis Z(s) ikke umiddelbart lader sig finde ved at anvende definitionen. Hvis $\sum c_n x^n$ er produktet af to potensrækker $\sum a_n x^n$ og $\sum b_n x^n$ for hvilke vi kender zetafunktionerne $Z_a(s)$ og $Z_b(s)$ og hvor $Z_a(s)$ er meromorf, kan Z(s) findes således:

$$G_a(y) = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s) Z_a(s)\, ds$$

$$= \sum c^a_\rho\, y^{-\rho} \text{ (sum over polerne } \rho \text{ for } \Gamma(s)Z_a(s))$$

hvor c^a_ρ er residuet af $\Gamma(s)Z_a(s)$ i ρ (vi har forudsat er residuerne udtømmer integralet, se nedenfor). Derfor er

$$G(y) = G_a(y)G_b(y)$$
$$= 1/(2\pi i) \int (\sum c^a_\rho y^{-s-\rho})\, \Gamma(s)Z_b(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)(\sum c^a_\rho(\Gamma(s - \rho)/\Gamma(s))Z_b(s - \rho))\, ds$$

således at Z(s) kan erstattes med $\sum c^a_\rho(\Gamma(s - \rho)/\Gamma(s))Z_b(s - \rho)$.

Asymptotiske potensrækker

En reel potensrække $\sum c_n x^n$ er *asymptotisk* hvis der findes reelle tal a, b og c således at

$$c_n/(an^b(\log n)^c) \rightarrow 1 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

- evt. kan log log n og så videre optræde. Og vi vil kalde $\sum c_n x^n$ asymptotisk i m lag hvis rækkerne $\sum c^j_n x^n$ for $j = 0, 1, ..., m - 1$ er asymptotiske.

Da zetafunktionen for $\sum c_n x^n$, $Z(s)$, er holomorf for $\mathrm{Re}(s)$ tilstrækkelig stor, må der findes et mindste reelt tal α (evt. $\alpha = -\infty$) således at $\mathrm{Re}(s) \leq \alpha$ for enhver pol af $Z(s)$ med residuum $\neq 0$, og da $Z(\bar{s}) = \overline{Z(s)}$ ligger polerne symmetrisk om den reelle akse. Polerne med $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ og residuum $\neq 0$ er de *principale* poler. Hvis der kun er én principal pol er denne $= \alpha$, og dette medfører at $\sum c_n x^n$ er asymptotisk med $a = \mathrm{res}_{s=\alpha} Z(s)$ og $b = \alpha - 1$ hvis polen er ordinær, og med $a = -\mathrm{res}_{s=\alpha} Z'(s)/(\alpha + 1)$ og $b = \alpha$ hvis polen er logaritmisk (at $Z(s)$ har logaritmisk pol i $s = \alpha$ med residuum a, betyder at $Z(s)$ i en omegn af α kan skrives som $Z(s) = a \log(s - \alpha) + U(s)$ hvor $U(s)$ er meromorf).

Hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk og vi for $G(y)$ skriver (side 20)

$$
\begin{aligned}
&1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\, ds \\
&= 1/(2\pi i) \int \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (y + k2\pi i)^{-s}\Big)\Gamma(s)Z(s)\, ds + \psi(y)
\end{aligned}
$$

hvor funktionen $\psi(y)$ er det der bliver til rest ved denne omskrivning, vil $\psi(y)$ tilfredsstille $\psi(y + 2\pi i)) = \psi(y)$ og have grænseværdi 0 for $\mathrm{Re}(y) \to \infty$. Og hvis $\psi(y)$ skrives som en potensrække i x ($= e^{-y}$): $\psi(y) = \sum e'_n x^n$, er $\sum e'_n x^n$ enten ikke asymptotisk eller hvis den er, er $b' < b$ eller $b' = b$ og $c' < c$.

Tilsvarende hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk i m lag:

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\, ds$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} 1/(2\pi i) \int (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_j{}^k (y + k2\pi i/m)^{-s})\Gamma(s)Z^j(s)\, ds + \psi(y)$$

hvor $\varepsilon_j = e(j/m)$. Når man efter en sådan omskrivning indfører den endelige integration

$$1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny} \ldots dy$$

i udtrykket for c_n, fås

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds + \ldots$$

eller evt.

$$c_n = m\sum_{j=0}^{m-1} 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z^j(s)\, ds + \ldots$$

da

$$1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny} (\sum \varepsilon^k (y + k2\pi i/m)^{-s})\, dy = m\, n^{s-1}/\Gamma(s).$$

for n = j (mod m) og ellers 0

Vi vil altid se bort fra det sidste integral i denne formel, men vi må sikre os at dets bidrag er forsvindende for $n \to \infty$. Og i udregningen af det første integral vil vi oftest nøjes med det eller de principale led.

Når Z(s) er meromorf kan vi finde det principale led af $1/(2\pi i) \int n^{s-1}Z(s)\, ds$ ved residueregning. Har Z(s) således de simple poler ρ med residuer c_ρ i strimlen b < Re(s) < a, er

$$1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds$$

$$= \sum_{\rho} c_\rho n^{\rho-1} + 1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} n^{s-1} Z(s)\, ds.$$

Konvergerer det sidste integral imod 0 for $b \to -\infty$, er det oprindelige integral altså en sum af formen $\sum c_\rho n^{\rho-1}$. Dette vi være tilfældet hvis $|Z(s)| \to 0$ for $|s| \to \infty$ i en halvplan $Re(s) < b$, for det følger af Jordans sætning der siger at hvis C^-_r er en halvcirkel med radius r i en sådan halvplan, da gælder for $x > 1$ at

$$\left|\int_{C^-_r} x^s Z(s)\, ds\right| \to 0 \text{ for } r \to \infty.$$

Hvis Z(s) ikke er meromorf men Z'(s) er meromorf (hvilket betyder at Z(s) har logaritmiske poler), kan $\int n^{s-1} Z(s)\, ds$ udregnes ved partiel integration.

Eksempler

1. $\sum c_n x^n = \sum n^m x^n$ $(m \geq 0)$ er asymptotisk. Da $Z(s) = \zeta(s - m)$ har vi for G(y)

$1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)\zeta(s - m)\, ds = 1/(2\pi i) \int (\sum (y + k2\pi i)^{-s})\Gamma(s)\zeta(s - m)\, ds + ...$

og her er resten = 0, da integralet på venstre side er

$$(m!/y^m)(1/y + (-1)^m \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \binom{i}{m} y^i)$$

og integralet på højre side er blot

$$m! \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(y + k2\pi i)^{m+1}$$

da $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$ er nul på polerne af $\Gamma(s)$ (side 14), og disse to størrelser er lig hinanden ifølge formlen side 10. Ved indførelse af integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$ fås

$$c_n = 1/(2\pi i) \int n^{s-1}\zeta(s - m)\, ds = n^m.$$

2. $\sum c_n x^n = \sum (-1)^i x^i$ er ikke asymptotisk, for dens zetafunktion $Z(s) = (2/2^s - 1)\zeta(s)$ har ingen poler. Af Cauchys integralformel får vi for c_n (da $\sum (-1)^i x^i = -1/(e^y + 1)$):

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} e^{ny}(-1/(e^y + 1))\, dy = (-1)^n.$$

Men vi har også $\sum (-1)^i x^i = \sum x^{2j} - \sum x^{2j+1}$ som er asymptotisk i 2 lag, derfor er

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int (\sum (y + k\pi i)^{-s})\Gamma(s)(1/2^s)\zeta(s)\, ds$$
$$- 1/(2\pi i) \int (\sum (-1)^k(y + k\pi i)^{-s})\Gamma(s)(1 - 1/2^s)\zeta(s)\, ds$$

(restleddet er 0). Det første integral giver (side 24) $c_n = 2/2 = 1$ for n lige og ellers 0, det andet integral giver $c_n = -2/2 = -1$ for n ulige og ellers 0.

Sumformler

Sumrækken til $\sum c_n x^n$ er givet ved potensrækken $\sum \Sigma c_n x^n = (\sum x^i)(\sum c_j x^j)$, altså $\Sigma c_n = \sum c_i$ (sum over i < n). For en sumrække kan vi let og ad en helt anden vej end ovenfor udlede en formel for Σc_n - og som ovenikøbet er helt eksakt:

Fouriers inversionssætning (eller rettere Fourier-Mellins sætning) siger at hvis f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ er stykkevis differentiabel og integralet

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)/x^s \, dx/x$$

er absolut konvergent for $\mathrm{Re}(s) > a_0$, da er

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s F(s) \, ds$$

for $a > a_0$, idet højre side i springpunkterne for f(x) giver middelværdier af grænseværdierne fra venstre og højre.

Sættes heri $f(x) = (\sum c)(x)$, defineret ved $f(x) = \sum c_n$ for $n - 1 < x \le n$, ses at $F(s) = Z(s)/s$. Partiel integration giver nemlig at $s \int (\sum c_n)(x)/x^s \, dx/x = \int x^{-s} \, d(\sum c)(x)$ (Stieltjes-integral) $= \sum c_n/n^s$. Så derfor er

$$(\sum c)(x) = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s Z(s) \, ds/s$$

hvor værdien af højre side for x = n er $\sum c_n + c_n/2$. Bemærk at hvis vi i integralet sætter $Z(s) = \sum c_n/n^s$, får vi umiddelbart venstre side.

Imidlertid kan det være vanskeligt at udregne mere end de principale led af integralet $\int x^s Z(s) \, ds/s$ ved residueregning, men da sumrækken er produktet af to potensrækker kan man med fordel benytte metoden på side 22: Da (side 10 og 21, $x = e^{-y}$)

$$\sum x^i = y^{-1} + \sum \alpha_m y^m \ (m \ge 0) \text{ og } \sum c_j x^j = 1/(2\pi i) \int y^{-s} \Gamma(s) Z(s) \, ds$$

er for $\mathrm{Re}(y) > 0$

$$\sum \sum c_n x^n = 1/(2\pi i) \int (y^{-s-1} + \sum \alpha_m y^{-s+m}) \Gamma(s) Z(s) \, ds$$

$$= 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)(Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1)Z(s + m))\, ds.$$

Zetafunktionen til sumrækken for $\sum \sum c_n x^n$ synes altså at være

$$Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1)Z(s + m).$$

Da denne række imidlertid kan være divergent, må vi muligvis afkorte rækken:

Vi kan skrive zetafunktionen som

$$Z(s - 1)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s...(s + m - 1)Z(s + m) + ...$$

Hvis $\sum \sum c_n x^n$ er asymptotisk har vi altså

$$\sum c_n = 1/(2\pi i) \int n^{s-1}(Z(s - 1)/(s - 1) + \sum \alpha_m s...(s + m - 1)Z(s + m))\, ds + ..$$

Hvis vi sætter

$$f^{(-1)}(x) = 1/(2\pi i) \int x^{s-1} Z(s - 1)/(s - 1)\, ds$$

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int x^{s-1} Z(s)\, ds$$

$$\dots$$

$$f^{(m)}(x) = 1/(2\pi i) \int x^{s-1} s...(s + m - 1)Z(s + m)\, ds$$

så bliver $f^{(m)}(x)$ den m-te afledede af f(x) i formal forstand, og vi har

$$\sum c_n = f^{(-1)}(n) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m f^{(m)}(n) + ...$$

Bemærk at det første led i sumudtrykket er $(-1/2)f(n)$ og at $f(n)$ er den principale del af c_n hvis $\sum c_n x^n$ er asymptotisk.

Hvis vi kun medtager det principale led $f^{(-1)}(n)$, får vi:

$$\sum c_n = 1/(2\pi i) \int n^s Z(s)/s \, ds + \ldots$$

Når vi inddrager zetafunktionen for sumrækken kan vi ofte, i tilfælde hvor potensrækken $\sum c_n x^n$ er asymptotisk, udregne større dele af integralet ved residueregning end når vi udregner $\int n^s Z(s)/s \, ds$ - eksempel 1 nedenfor.

Nogle konkrete summationer

1. Lad α være reel og $\neq -1$. Vi vil finde en formel for summen $1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha$. Da zetafunktionen til potensrækken $\sum n^\alpha x^n$ er $\zeta(s - \alpha)$, er

$$1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha = 1/(2\pi i) \int n^s \, \zeta(s - \alpha) \, ds/s - n^\alpha/2.$$

Bidraget fra residuerne i dette integral er $n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \zeta(-\alpha)$, og dette udtømmer tydeligvis ikke integralet. Hvis vi imidlertid benytter at zetafunktionen til sumrækken af $\sum n^\alpha x^n$ er (side 28)

$$\zeta(s - 1 - \alpha)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s \ldots (s + m - 1)\zeta(s + m - \alpha)) + \ldots$$

har vi

$$1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n - 1)^\alpha$$
$$= 1/(2\pi i) \int n^{s-1}(\zeta(s - 1 - \alpha)/(s - 1) + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m s \ldots (s + m - 1)\zeta(s + m - \alpha) + \ldots) \, ds + \ldots$$

$$= n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \zeta(-\alpha) + \sum_{m=0}^{M} (B_{m+1}/(m + 1)!)\alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (m - 1))n^{\alpha-m} + ...$$

og hvis vi sammenligner denne formel med formlen for $\zeta(s)$ på side 16, ser vi at vi dér skal sætte $s = -\alpha$ og $N = n$, og at restleddet må være det vi dér betegnede R_M med modsat fortegn. Jo større n er desto større kan M vælges og desto mere nøjagtig tilnærmelse kan vi få. For α hel er rækken endelig (vi benytter at $\zeta(-\alpha) = -B_{\alpha+1}/(\alpha + 1)$):

$$1^{\alpha} + 2^{\alpha} + ... + (n - 1)^{\alpha} = n^{\alpha+1}/(\alpha + 1) + \sum_{m=0}^{\alpha-1 \text{ for } \alpha \text{ lige, } \alpha-2 \text{ for } \alpha \text{ ulige}} (B_{m+1}/(m + 1)!)\alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (m - 1))n^{\alpha-m}$$

For $\alpha = -1$ må vi udregne $1/(2\pi i) \int n^s \zeta(s + 1)\, ds/s$. Da vi omkring $s = 0$ har $n^s = 1 + s \log n + s^2(\log n)^2/2 + ...$ og $\zeta(s + 1) = 1/s + \lambda + ...$ (λ = Eulers konstant = 0,577...), er $n^s\zeta(s + 1) = 1/s + (\log n + \lambda) + ...$, og vi får ved residueregning at

$$1+ 1/2 + 1/3 + ... + 1/(n - 1) = \log n + \lambda + ...$$

2. Da $\sum d_n/n^s = \zeta(s)^2$ (for $Re(s) > 1$), hvor d_n = antallet af divisorer i n (1 og n inkluderet), og da vi for s omkring 1 har $\zeta(s) = 1/(s-1) + ...$ og $n^s = nn^{s-1} = n(1 + \log n\,(s-1) + ...)$, er $n^s\zeta(s)^2 = n(1/(s-1)^2 + \log n /(s-1) + ...)$, så derfor er

$$\sum c_n = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^s\zeta(s)^2\, ds/s + \dots = n \log n + ...$$

Vi har altså: det gennemsnitslige antal af divisorer i de første n tal er $\approx \log n$. For $n = 50.000$ er det gennemsnitlige antal af divisorer = 10,97 og $\log n = 10,82$.

3. Hvis k_m = antallet af måder hvorpå m kan skrives som en sum af to kvadrattal (≠ 0), er $2\sum k_m x^m = (\sum x^{n\wedge 2})^2$. Da zetafunktionen til $\sum x^{n\wedge 2}$ er $\zeta(2s)$, er $\sum x^{n\wedge 2} = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)\, ds = \sqrt{\pi}/2\ y^{-½} + \ldots$ Resten kan ikke findes ved residueregning, da $\zeta(2s)$ er nul på alle polerne for $\Gamma(s)$ med $\mathrm{Re}(s) < 0$. Ved indsætning får vi

$$(\sum x^{n\wedge 2})^2 = 1/(2\pi i) \int y^{-s}(\sqrt{\pi}/2\ y^{-½})\Gamma(s)\zeta(2s)\, ds\ + \ldots$$
$$= 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)((\sqrt{\pi}/2)(\Gamma(s-½)/\Gamma(s))\zeta(2s-1))\, ds\ + \ldots$$

som viser at vi som zetafunktion til $(\sum x^{n\wedge 2})^2$ kan bruge $Z(s) = (\sqrt{\pi}/2)(\Gamma(s-½)/\Gamma(s))\zeta(2s-1)$. Sættes denne ind i $1/(2\pi i) \int N^s Z(s)/s\, ds$, fås ved residueregning:

$$2\sum_{n=1}^{N-1} k_m = N(\sqrt{\pi}/2)\Gamma(½) + \ldots = \pi/4\ N + \ldots$$

Vi har altså at det gennemsnitslige antal måder hvorpå et tal kan skrives som summen af to kvadrattal er $\pi/8 \approx 0{,}3927$. For $N = 2\cdot 10^6$ er gennemsnittet 0,3926...

4. Da $(\sum |\mu(k)|/k^s)(\sum 1/m^{2s}) = \sum 1/n^s$, idet ethvert tal n kan skrives entydigt på formen km^2, hvor k ikke indeholder en primfaktor i en højere potens, er zetafunktionen til $\sum |\mu(n)|x^n$ lig $\zeta(s)/\zeta(2s)$. Ved residueregning får vi

$$\sum c_n = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^s\zeta(s)/\zeta(2s)\, ds/s + \ldots = n/\zeta(2) + \ldots$$

Dette betyder at: sandsynligheden for at n ikke indeholder en primfaktor mere end én gang $\approx 1/\zeta(2) = 6/\pi^2 = 0{,}6079\ldots$

5. Da zetafunktionen til $\sum \mu(n)x^n$ er $1/\zeta(s)$ (side 18), er (side 20)

$$\sum \mu(n)x^n = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)/\zeta(s)\, ds$$

hvor $y = \log(1/x)$. Der kan integreres langs linjen Re(s) = 0.51. $\sum \mu(n)x^n$ er 0 for x = 0,58047..., og positiv for mindre x og negativ for større x. For $x \to 1$ er summen $\sum \mu(n)x^n$ bestemt ved hvor mange led der medtages, og derfor ubestemt - det svarer til at $y \to 0$, og derfor giver en ubestemt formel. Hvis vi forsøger at udregne integralet ved residueregning, får vi $\sum y^{-\rho}\Gamma(\rho)/\zeta'(\rho)$, hvor summen er over nulpunkterne af $\zeta(s)$ i strimlen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, da $\Gamma(s)$ er nul på de ikke-trivielle nulpunkter for $\zeta(s)$ (og da det formodes at alle nulpunkterne af $\zeta(s)$ er simple). Denne sum er imidlertid meget lille, da $\Gamma(s)$ aftager kraftigt i den imaginære retning. Sagen er at integralet langs en halvcirkel i den negative halvplan ikke går imod 0 når radius går imod uendelig.

Tilsvarende har vi

$$\sum (\mu(n)/n)x^n = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\Gamma(s)/\zeta(s+1)\, ds$$

hvor $y = \log(1/x)$. Der kan integreres langs y-aksen. Denne funktion er positiv i intervallet [0, 1] og nul i endepunkterne: $\sum \mu(n)/n = 0$. Og da dens afledede er (1/x) gange den foregående funktion, når den sit maximum for x = 0,58047... Der gælder den samme bemærkning om udregning ved residueregning.

For sumrækken til $\sum \mu(n)x^n$ har vi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu(k) = 1/(2\pi i) \int n^s/\zeta(s)\, ds/s = \sum n^\rho/(\rho\zeta'(\rho))$$

hvor der skal summeres over *alle* nulpunkter ρ, samt s = 0 som bidrager med $1/\zeta(0) = -2$. For de ikke-trivielle nulpunkter ρ er (ifølge Riemanns hypotese) $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$, og for de øvrige nulpunkter er $\mathrm{Re}(\rho) < 1/2$, derfor kan $\sqrt{n}$ sættes udenfor en parentes, og venstresiden divideret med $\sqrt{n}$ synes at være begrænset. *Mertens formodning* siger at tallene $(\sum \mu(k))/\sqrt{n}$ er begrænset af tallet 1. Dette er ikke sandt: et lidt større tal må vælges, men det er ikke bevist at tallene er begrænsede.

Påstanden kan formuleres således: hvis de tal der ikke indeholder en primfaktor mere end én gang, deles i to klasser: de der består af et ulige antal primfaktorer og de der består af et lige antal primfaktorer, er denne talfølge begrænset

$$|\#\{\text{første klasse} < n\} - \#\{\text{anden klasse} < n\}|/\sqrt{n}.$$

Riemanns hypotese kan vises at være ensbetydende med, at erstattes $\sqrt{n}$ her med $n^{½+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ går tallet imod 0 for $n \to \infty$.

6. Da zetafunktionen til $\sum \underline{\sigma}_n x^n$ er $-\zeta(s)\sum mZ'_p(ms-1)$ (side 19), har vi for $\underline{b}_n = \sum\underline{\sigma}_n$

$$\underline{b}_n = -\sum_{m=1}^{\infty} 1/(2\pi i) \int n^s\zeta(s)mZ'_p(ms-1)\, ds/s + \ldots$$

Da $Z'_p(ms-1) = \sum \mu(k)\zeta'(k(ms-1))/\zeta(k(ms-1))$ (side 18), får vi de to første led for $k = 1$ og $k = 2$. Og da $\zeta'(s)/\zeta(s)$ har principal pol i $s=1$ med residuum -1, skal vi beregne residuer for $s = 2$ og $s = 3/2$. Vi får

$$\underline{b}_n/n \approx \zeta(2)/2\ n - 2\zeta(3/2)/3\ \sqrt{n}$$

- her er $\zeta(2)/2 = \pi^2/12 = 0{,}8225$ og $2\zeta(3/2)/3 = 1{,}7416$. Da det første led giver for stor værdi og begge led giver for lille værdi, tager vi gennemsnittet. For $n = 8888$ er $\underline{b}_n/n= 7219$, og første- og begge led er 7310 og 7146, og disses gennemsnit er 7228.

7. Da zetafunktionen til $\sum \sigma_n x^n$ er $\zeta(s)\sum mZ_p(ms - 1)$ $(m \geq 1)$ (side 19), som er ikke-meromorf, må vi bruge partiel integration for at få en tilnærmelsesformel for $b_n = \sum\sigma_n$. Vi har

$$1/(2\pi i) \int (n^s \zeta(s)/s) Z_p(s-1)\, ds = -1/(2\pi i) \int \left(\int_1^s n^u \zeta(u) du/u\right) Z'_p(s-1)\, ds.$$

Og da (side 18)

$$Z'_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\zeta'(ms)/\zeta(ms)$$

får vi de to første led for m = 1 og m = 2, hvilket svarer til s = 2 og s = 3/2, og vi får ved substitutionen u = 2 log t /log n at

$$b_n \approx \int_1^n \zeta(2 \log t/\log n)\, t\, dt/\log t - \int_1^n \zeta(3/2 \log t/\log n) \sqrt{t}\, dt/\log t.$$

Da første led giver for stor værdi og begge led giver for lille værdi, tager vi gennemsnittet af disse to værdier. For n = 8888 er $b_n/n = 923$, og første led divideret med n er 934, og begge led divideret med n er 906, og disses gennemsnit er 920.

8. Vi vil finde sumrækken $\sum \psi_n x^n$ til $\sum \Lambda_n x^n$. $\psi_n = \psi(n)$ kaldes Chebyshevs ψ-funktion og er altså givet ved $\psi_n = \sum \log p$ (sum over $p^r < n$, p primtal og r > 0). Da $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ (side 19) har vi ved residueregning

$$\psi_n = 1/(2\pi i) \int n^s(-\zeta'(s)/\zeta(s))\, ds/s$$

$$= n - \sum_\rho n^\rho/\rho - \zeta'(0)/\zeta(0) - \sum_{k=1}^{\infty} n^{-2k}/(-2k)$$

$$= n - \sum_\rho n^\rho/\rho - \log(2\pi) - \log(1 - n^{-2})/2$$

da residuerne udtømmer integralet og $\zeta'(0)/\zeta(0) = \log(2\pi)$. Leddet $\sum n^\rho/\rho$ er forsvindende for $n \to \infty$ (se næste kapitel), derfor er

$$\psi_n \approx n$$

For $n = 50.000$ er $\psi_n = 49.986$. Se grafen på side 73 hvor 500 nulpunkter er anvendt.

9. Tilsvarende kan vi finde sumrækken $\sum \theta_n x^n$ til $\sum \underline{\pi}_n x^n = \sum \log p\ x^p$. $\theta_n = \theta(n)$ kaldes Chebyshevs θ-funktion og er altså givet ved $\theta_n = \sum \log p$ (p primtal < n). Da $Z_{\underline{\pi}}(s) = -Z'_p(s) = -\sum \mu(m)\ \zeta'(ms)/\zeta(ms)$ (side 19) har vi ved residueregning

$$\theta_n = \sum \mu(m)/(2\pi i) \int n^s(-\zeta'(ms)/\zeta(ms))\ ds/s$$

$$= \sum \mu(m)(n^{1/m} - \sum m\ n^{\rho/m}/\rho - \log(2\pi) - m \log(1 - n^{-2/m})/2)$$

$$\approx \sum \mu(m)n^{1/m} \approx n.$$

- for $n = 50.000$ er $\theta_n = 49.731{,}3$ og $\sum \mu(m)n^{1/m} = 49.732{,}5$. Se grafen på side 73 hvor 500 nulpunkter er anvendt. Formlen kan også formuleres således: produktet af primtallene op til n er $\approx e^n$.

Riemanns teori - formel for π_n

I sumformlerne ovenfor for $\sum \log p$ (sum over $p^r < n$, p primtal og $r > 0$) og $\sum \log p$ (p primtal < n) kunne vi ved residueregning nemt finde præcise formler, fordi disse sumrækkers zetafunktioner er meromorfe - de er henh. $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ og $-\sum \mu(m)\ \zeta'(ms)/\zeta(ms)$. Den sumrække vi nu skal finde en formel for, π_n = antallet af primtal < n = $\sum 1$ (p primtal < n), er mere besværlig, da dens zetafunktion (side 18), $Z_p(s) = \sum \mu(m)/m \log \zeta(ms)$, ikke er meromorf i punktet $s = 1$. Vi har (for $a > 1$, side 29)

$$\pi_n = 1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^s Z_p(s)/s\ ds.$$

og da den afledede af $Z_p(s)$ er $Z'_p(s) = \sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$, som er meromorf, kan vi anvende partiel integration:

$$\int n^s Z_p(s)\, ds/s = \lim_{r\to\infty}\Big[\Big(\int^s n^t\, dt/t\Big) Z_p(s)\Big]_{a-ri}^{a+ri} - \int \Big(\int^s n^t\, dt/t\Big) Z'_p(s)\, ds.$$

Her er grænseovergangen, og dermed også det andet integral, imidlertid divergent. Men hvis vi kan vise at

$$\int_{C_r^-} n^s Z_p(s)\, ds/s \to 0 \quad \text{for} \quad r \to \infty$$

hvor C_r^- er den venstre halvcirkel fra a - ri til a + ri, følger at resultatet af integrationen er summen af residuerne i det sidste integral. Hvis vi i integralet $\int n^s Z_p(s)\, ds/s$, indsætter $Z_p(s) = \sum \mu(m)/m \log \zeta(ms)$ og (side 16)

$$\log \zeta(s) = -\log(s-1) + \sum_\rho \log(1 - s/\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} (\log(s+2k) - s(1+1/k)/2)) + s(\log \pi)/2 - \log 2$$

og udregner integralet ledvis langs halvcirklen, vil leddene med s(...) divergerer, hvis vi derimod anvender partiel integration

$$\int_{C_r^-} n^s\, (Z_p(s)/s)\, ds = (1/\log n)(\lim_{r\to\infty}[n^s\, Z_p(s)/s)]_{a-ri}^{a+ri} - \int_{C_r^-} n^s\, d/ds(Z_p(s)/s)\, ds)$$

ser vi at begge led på højre side går mod 0 for $r \to \infty$: grænseovergangen da $|n^{a\pm ri} \log \zeta(a \pm ri)/(a \pm ri)| < n^a \log \zeta(a)/|a \pm ri| \to 0$ for $r \to \infty$ og integralet som følge af Jordans sætning da $|d/ds(Z_p(s)/s)| \to 0$ for $|s| \to \infty$.

Vi har altså at π_n er integralet

$$-1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\int^{s} n^{t}\, dt/t\right) Z'_p(s)\, ds$$

udregnet ved residueregning. Herved har vi fået introduceret en ny funktion, $\int n^t\, dt/t$, hvor det er mest hensigtsmæssigt at starte integrationen i $-\infty$. Da dette integral er $\int n^{st}\, dt/t$ (integration fra $-\infty$ til 1) for $\mathrm{Re}(s) > 0$ og $\int n^{st}\, dt/t$ (integration fra 1 til ∞) for $\mathrm{Re}(s) < 0$, definerer vi funktionen $\mathrm{Li}(x)$ ($\mathrm{Re}(x) > 0$) - *integrallogaritmen* - ved

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{-\infty}^{1} x^t\, dt/t$$

for $|x| > 1$ og

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{1}^{\infty} x^t\, dt/t$$

for $|x| < 1$.

Da nu $Z'_p(s) = \sum \mu(m)/m\, (d/ds)(\log \zeta(ms))$ og $(d/ds) \log \zeta(s) = -1/(s - 1) + \sum 1/(s - \rho) + \sum(1/(s + 2k) - \log(1 + 1/k)/2) + (\log \pi)/2$, får vi at summen af residuerne af $1/(2\pi i) \int \mathrm{Li}(n^s)\, Z'_p(s)\, ds$ er

$$\sum \mu(m)/m\, J(n^{1/m})$$

hvor

$$J(x) = -\mathrm{Li}(x) + \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Li}(x^{-2k}).$$

Det sidste led er

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum \mathrm{Li}(x^{-2k}) \ (k > 0) \\ &= \sum \int_{1}^{\infty} x^{-2kt}\, dt/t = -\int_{1}^{\infty} 1/(x^{2t} - 1)\, dt/t \end{aligned}$$

og $H(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Vi har altså

$$\pi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \, J(n^{1/m})$$

hvor

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum \mathrm{Li}(x^\rho) - H(x).$$

Hadamard og la Vallée-Poussin beviste i 1896 (uafhængigt af hinanden) *primtalssætningen:*

$$\pi_n/(n/\log n) \rightarrow 1 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

(dette er ækvivalent med $\psi_n/n \rightarrow 1$ eller $\theta_n/n \rightarrow 1$ for $n \rightarrow \infty$, altså at restleddet i vores ovenfor fundne formler for ψ_n og θ_n er forsvindende).

Hadamard og la Vallée-Poussin viste ydermere at

$$\pi_n = \mathrm{Li}(n) + O(n/e^{A\sqrt{\log n}})$$

hvor $A > 0$.

Da $\mathrm{Li}(x)/(x/\log x) \rightarrow 1$ for $x \rightarrow \infty$, følger af primtalssætningen at bidraget fra $\sum \mathrm{Li}(x^\rho)$ er forsvindende. Denne række er dog kun betinget konvergent: den skal naturligvis fortolkes som $\sum (\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho}))$ (da de ikke-trivielle nulpunkter til $\zeta(s)$ optræder i par ρ, $1 - \rho$, som er hinandens konjugerede hvis Riemanns hypotese gælder), og de enkelte led $\mathrm{Li}(x^\rho)$ vokser af størrelsesorden $\sqrt{x}/\log x$.
Vi har altså tilnærmelserne

$$\pi_n \approx \sum \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(n^{1/m}) \approx \mathrm{Li}(n) \approx n/\log n.$$

Det er let at udregne $\sum \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(n^{1/m})$, thi ved succesiv differentation i $x = 0$ og anvendelse af $\sum \mu(m)/m^n = 1/\zeta(n)$ fås den hurtigt konvergerende rækkeudvikling

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)/m \, \mathrm{Li}(x^{1/m}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n/(\zeta(n + 1)n!n)$$

(Gram, 1893).

Den anden tilnærmelse, $\pi_n \approx \mathrm{Li}(n)$, blev postuleret af den 15-årige Gauss, idet han havde observeret at tætheden af primtallene ved x er nær 1/log x, og han mente at

$$\int_2^x dy/\log y$$

måtte være en bedre tilnærmelse. Erstattes 2 her med 0, er dette integral = Li(x) - afvigelsen er kun omkring 1.

For n = 10.000.000 er π_n = 664.579, og de tre tilnærmelser overfor er henh. 664672 (100 led), 664923 og 620421, Grams formel giver 664467.

Det kan vises (von Koch, 1901) at Riemanns hypotese er ækvivalent med

$$\pi_n = \mathrm{Li}(n) + O(\sqrt{n} \log n).$$

Men det gælder også at $2|\pi_n - \mathrm{Li}(n)| > \sqrt{n}/\log n$ for uendelig mange n - dette gælder endda både hvis $\pi_n - \mathrm{Li}(n)$ forudsættes positiv eller negativ (Littlewood, 1914). $\pi_n - \mathrm{Li}(n)$ er negativ for alle n hvor dette tal er beregnet, og tallet er først positivt for ekstremt store n.

Det kan vises (Dirichlet, 1839, se side 47) at for et givet naturligt tal k > 1 og et tal h < k som er primisk med k, er der uendeligt mange primtal i restklassen h + ik (i = 0, 1, 2, ...), endda "lige mange" i hver af restklasserne modulo k: hvis vi lader π(n, k, h) være antallet af primtal p < n således at p = h (modulo k), er

$$\pi(n, k, h) \approx \pi_n/\phi(k).$$

For $n = 600.000$ og $k = 29$ er $\pi_n/\phi(k) = 1754$, og $\pi(n, 29, 14) = 1757$ og $\pi(n, 29, 15) = 1755$.

Siegel-Walfisz' sætning (1936) generaliserer Hadamard & la Vallée-Poussins resultat: for ethvert $B > 0$ findes et $A > 0$ således at for $k < (\log n)^B$ gælder

$$\pi(n, k, h) = \mathrm{Li}(n)/\phi(k) + O(n/e^{A\sqrt{\log n}}).$$

Halberstams formodning siger at for ethvert reelt tal A findes et tal $\varepsilon < 1$ således at

$$\sum_{k=1}^{[n^{1-\varepsilon}]} \max_h|\pi(n, k, h) - \mathrm{Li}(n)/\phi(k)| = O(n/(\log n)^A).$$

Et resultat i den retning som er bevist, er *Bombieri-Vinogradovs middelværdisætning*, hvor $n^{1-\varepsilon}$ er erstattet med $n^{½-\varepsilon}$. Bombieris sætning (1965) er en smule stærkere, idet $n^{½-\varepsilon}$ er erstattet med $\sqrt{n}/(\log n)^B$. Sådanne sætninger er som vi skal se (side 57 og 67), afgørende i mange beviser for resultater der er beslægtet med Goldbachs formodning.

[I sin udledning af formlen for π_n gik Riemann en smule anderledes tilværks end os, idet han udregnede

$$J(x) = 1/(2\pi i \log x) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s\, (d/ds)(\log \zeta(s)/s)\, ds$$

hvor integranden ikke er meromorf, ved differentation. Resultatet er følgende formel:

$$1/(2\pi i \log x) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s\, (d/ds)(\log(1 - s/\rho)/s)\, ds$$

$$= \int_0^x t^{\rho-1}/\log t \, dt \text{ for } \mathrm{Re}(\rho) > 0$$

og

$$= -\int_x^\infty t^{\rho-1}/\log t \, dt \text{ for } \mathrm{Re}(\rho) < 0.$$

hvilke ved substitutioen $t = x^u$ bliver $\mathrm{Li}(x^\rho)$ - der kommer nogle konstante led, som forsvinder igen da $\sum \mu(m)/m = 0$.]

For sumrækken til $\sum px^p$ får vi ganske analogt, da zetafunktionen til denne række er $Z_p(s - 1)$:

$$\sum_{p \text{ primtal} < n} p \approx \sum \mu(m)/m \ \mathrm{Li}(n^{1+1/m}) \approx \mathrm{Li}(n^2) - \mathrm{Li}(n^{3/2})/2 \approx \mathrm{Li}(n^2).$$

For n = 40.000 er $\sum p = 7{,}917 \cdot 10^7$, formlen med de to led giver $7{,}918 \cdot 10^7$.

For sumrækken til $\sum x^p/p$ er zetafunktionen $Z_p(s + 1)$. Den principale del af denne er $-1/((s+1) - 1) = -1/s$, hvilket betyder at $Z_p(s + 1)$ har simpel pol i $s = 0$ med residuum -1. Men dette betyder at integralet der er giver $\sum 1/p$ (p primtal < n)

$$-1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{Li}(n^s) Z'_p(s+1) \, ds$$

ikke kan udregnes ved residueregning, da $\mathrm{Li}(n^s)$ ikke er defineret for $s = 0$: man må rækkeudvikle $\mathrm{Li}(n^s)$ og $Z'_p(s+1)$ nær $s = 0$. Så får man at $\sum 1/p$ (p primtal < n) = loglog n + 0.2615 + ... For n = 100 er summen 1,80 og formlen giver 1,79. Integralet (for a = 1/4) giver også 1,79.

Dirichlets L-funktioner

I de næste §§ får vi brug for en type zetafunktioner som er en slags cyclisk generalisering af Riemanns zetafunktion.

Lad $\sum c_n x^n$ være en potensrække med zetafunktion Z(s). Hvis $e(\theta) = e^{\theta 2\pi i}$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ kan vi danne en ny potensrække: $\sum c_n(e(\theta)x)^n$, og dermed en ny zetafunktion:

$$Z^\theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e(\theta)^n c_n/n^s.$$

Vi forudsætter at Z(s) er meromorf, så er $Z^\theta(s)$ også meromorf. Der er et reelt tal λ således at der er simple poler s for Z(s) med $Re(s) = \lambda$ og således at $Re(s) \leq \lambda$ for de øvrige simple poler s. Dette medfører at for enhver simpel pol s for $Z^\theta(s)$ er $Re(s) \leq \lambda$. Vi vil antage at Z(s) kun har én simpel pol s med $Re(s) = \lambda$. Denne pol er altså $= \lambda$, og dens residuum vil vi betegne c^0.

En anden måde at danne zetafunktioner på, er at betragte gruppen $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ for et naturligt tal k. Den har orden $\phi(k)$, og vi lader χ_r $(r = 1, ..., \phi(k))$ være karaktererne på $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ - her er χ_1 den principale karakter: $\chi_1(j) \equiv 1$. $\chi_r(n)$ kan defineres for alle $n \in \mathbb{Z}$, hvis vi sætter $\chi_r(n) = 0$ når n ikke er primisk med k. Vi vil hyppigt udnytte at

$$\sum_{r=1}^{\phi(k)} \chi_r(n) = \phi(k) \text{ hvis } n = 1 \text{ (mod k) og ellers } 0.$$

Zetafunktionerne $L_r(s)$ $(r = 1, ..., \phi(k))$ - *Dirichlets L-funktioner* - defineres ved

$$L_r(s) = \sum \chi_r(n)/n^s = \prod (1 - \chi_r(p)/p^s)^{-1}$$

for Re(s) > 1. $L_r(s)$ kan udvides meromorft til hele planen og tilfredsstiller en funktionalligning som har lighed med funktionalligningen for $\zeta(s)$. For $L_1(s)$, som er givet ved

$$L_1(s) = \sum_{(n,k)=1} 1/n^s = \prod_{p|^c k} (1 - 1/p^s)^{-1}$$

er udvidelsen = $\zeta(s) \prod (1 - 1/p^s)$ (produkt over primfaktorerne i k). Den har én pol, nemlig i s = 1, med residuum $\prod (1 - 1/p)$ (produkt over primfaktorerne i k). For r > 1 er $L_r(s)$ holomorf. Alle $L_r(s)$ har uendelig mange nulpunkter i halvplanen Re(s) > 0 og Riemanns hypotese for disse zetafunktioner, siger at for alle nulpunkterne er Re(s) = 1/2. Ved differentation fås

$$L'_r(s)/L_r(s) = -\sum_p \sum_m \chi_r(p^m) \log p/p^{ms}$$

derfor er for $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$

$$Z^{h/k}{}_\Lambda(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \kappa_r(h/k)\, L'_r(s)/L_r(s)$$

hvor $\kappa_r(h/k) = \sum e(h/k)^j \chi_r(j)^{-1}$ (sum over j ε $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$).

Ved analoge udregninger fås for begrænsning til n = h mod k:

$$Z^h{}_\Lambda(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \chi_r(h)^{-1}\, L'_r(s)/L_r(s)$$

Da højre side har pol i s = 1 og venstre side er $-\sum (\log p)/p^s$ (sum over p således at p = h (mod k)) + en funktion der er regulær i s = 1, ses (Dirichlet) at *der er uendeligt mange primtal i hver restklasse*.

Svingende asymptotiske potensrækker

Potensrækkerne $\sum \pi_n x^n$ og $\sum b_n x^n$ er asymptotiske, og vi har fundet tilnærmelsesformler for π_n og b_n. Potensrækkerne $\sum \nu_n x^n$ og $\sum a_n x^n$ er ikke asymptotiske, men *svingende* asymptoriske: En potensrække $\sum c_n x^n$ er svingende asymptotisk hvis

$$c_n/(af(n)n^b(\log n)^c) \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

hvor f(n) er en funktion der svinger omkring 1 men ikke konvergerer. Derfor svigter vores ovenfor beskrevne fremgangsmåde til at finde c_n, fordi væsentlige dele af integralet G(y) bliver overført til restleddet når vi erstatter y^{-s} med $\sum (y + k2\pi i)^{-s}$. Vi må finde en anden fremgangsmåde.

Inden vi går i gang skal vi erindre, at ligesom de ovenstående formler for $\underline{\pi}_n$ og $\underline{b}_n$ er simplere end formlerne for π_n og b_n, fordi zetafunktionerne er meromorfe, bør vi i første omgang, i stedet for at udlede formler for ν_n og a_n, udlede formler for $\underline{\nu}_n$ givet ved $\sum \underline{\nu}_n x^n = (\sum \log p\, x^p)^2$ og for $\underline{a}_n$ givet ved $\sum \underline{a}_n x^n = (\sum \log p\, x^p)(\sum \underline{\sigma}_j x^j)$. Dermed får vi også tilnærmelsesformler for ν_n og a_n, idet $\nu_n/(\underline{\nu}_n/(\log n)^2) \to 1$ og $a_n/(\underline{a}_n/(\log n)^2) \to 1$. Vi kan så bagefter kigge på det ikke-meromorfe tilfælde.

Metoden vi vil benytte - *cirkelmetoden* - blev introduceret i en afhandling af Hardy og Ramanujan fra 1918, og den blev anvendt i en række afhandlinger om opspaltningsproblemer af Hardy og Littewood fra 1920-erne ("Partitio Numerorum I-VIII"). I integrationen

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_C (\sum c_i x^i)/x^{n+1}\, dx$$

hvor C er en lille cirkel om 0, foretages en opdeling af C i et endeligt antal buestykker C_i (i = 0, 1, ..., N) centreret omkring de punkter θ_i hvor $\sum c_i x^i$ har særligt store udsving.

I stedet for substitutioen $x = e^{-y}$ anvender vi nu $x = e(\theta)e^{-y}$.Vi sætter $\theta_0 = 0$ og lader θ_i, for i = 1, ..., N, være de θ hvor residuet af $Z^{\theta}(s)$ i punktet λ er numerisk større end et givet tal, og vi lader θ_i-erne være ordnet efter faldende størrelse af disse residuer som vi vil betegne c^i, i = 1, ..., N. For hvert i = 0, 1, ..., N vælges et delinterval af [0, 1] således at θ_i ligger "inde i midten" af dette (se eksemplet i næste §) og således at disse delintervaller udgør en opdeling af [0, 1] - vi identificerer 0 og 1.

Lad cirklen vi skal integrere over være givet ved $e^{-b}e(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$ (b > 0). Når $e^{-(b+ti)}e(\theta_i)$ gennemløber buestykket C_i, gennemløber t et interval $-\omega_i^- \le t \le \omega_i^+$. Vi har nu:

$$c_n = \sum_{i=0}^{N} 1/(2\pi i) \int_{C_i} (\sum c_j x^j)/x^{n+1}\, dx$$

$$= \sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{b-\omega_i^- i}^{b+\omega_i^+ i} e^{ny} \left(1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^{-s}\, \Gamma(s)Z^i(s)\, ds\right) dy$$

$$= \sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{ny}\, y^{-s}\, dy\right) \Gamma(s)Z^i(s)\, ds + \ldots$$

- restleddet beror på at vi har erstattet $\omega_i^{\pm}$ med ∞. Af formlen på side 22 følger at dette er lig

$$\sum e(-\theta_i)^n/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} n^{s-1}\, Z^i(s)\, ds + \ldots$$

$$= \kappa(n)\, n^{\lambda-1} + \ldots$$

- nyt restled beroende på at vi har udeladt de ikke-principale poler. Her er $\kappa(n) = \sum e(-\theta_i)^n c^i$ $(i \leq N)$. Hvis vi, i stedet for at definere c^i som residuet af $Z^i(s)$ i punktet λ, definerer c^i, nu kaldet $\underline{c}^i$, ved $1/(2\pi i) \int y^{-s} \Gamma(s)Z^i(s)\, ds = \underline{c}^i\, y^{-\lambda} + \ldots$, lyder formlen

$$c_n = \kappa(n)\, n^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda) + \ldots$$

hvor $\kappa(n) = \sum e(-\theta_i)^n \underline{c}^i$.

Da opdelingen af cirklen er fremkommet ved en procedure som kan fortsættes i det uendelige, vil vi lade summationen i definitionen af $\kappa(n)$ fortsætte i det uendelige - herved indføres igen en fejl som føres over til restleddet.

Men alt dette forudsætter at restleddet og summen i $\kappa(n)$ konvergerer, og selvom dette er tilfældet, har udtrykket for c_n naturligvis kun interesse hvis restleddet er forsvindende i forhold til det principale led for $n \to \infty$. I de tilfælde vi vil betragte, er rækken $\sum c_n x^n$ fremkommet som et produkt af to rækker, og det betyder at summen i $\kappa(n)$ konvergerer - derfor konvergerer restleddet også, men om vi kan *bevise* at det er forsvindende er en anden sag.

Opdeling af cirklen

Vi vil nu se hvordan tallene θ_i kan findes. For et givet tal $\theta \in [0, 1]$ skal vi finde residuet for den meromorfe udvidelse af $Z^\theta(s) = \sum e(\theta)^n c_n/n^s$ i $s = \lambda$ (i forhold til c^0) - dette tal kan naturligvis være 0.

Vi antager først at θ er rational $\theta = h/k$ (uforkortelig), og endvidere at k er et primtal p. For Re(s) > 1 er

$$Z^{h/p}(s) = \sum e(h/p)^n c_n/n^s$$

$$= \sum_{p|n} e(h/p)^n c_n/n^s + \sum_{p|^c n} e(h/p)^n c_n/n^s$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + \sum_{j=1}^{p-1} e(h/p)^j \sum_{n=j \ (\mathrm{mod}\ p)} c_n/n^s$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + 1/\phi(p) \sum_{j\ \varepsilon\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} e(h/p)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum \chi_r(n)c_n/n^s$$

$$= 1/p^s \sum c_{pn}/n^s + 1/\phi(p) \sum e(h/p)^j \sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)c_n/n^s$$

$$+ 1/\phi(p) \sum e(h/p)^j \sum_{r\varepsilon T^c} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)c_n/n^s$$

hvor T er mængden af de r hvor $\chi_r(n) = 1$ for alle undtagen endelig mange af de n hvor $c_n \neq 0$. Lad os antage at for $r\ \varepsilon\ T^c$ er $\sum \chi_r(n)c_n/n^s$ regulær i $s = \lambda$ - dette gælder for alle de rækker vi vil betragte - da kan vi se bort fra bidragene fra $r\ \varepsilon\ T^c$ da vi kun skal bruge residuerne af rækkerne. Endvidere kan vi for $r\ \varepsilon\ T$ sætte $\chi_r(n) = 1$ for *alle* n hvor $c_n \neq 0$. Derfor har vi

$$Z^{h/p}(s) = 1/p^s \sum c_{pn}/n^s +$$
$$1/\phi(p) \left(\sum e(h/p)^j \left(\sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1}\right)\right)\left(\sum c_n/n^s - 1/p^s \sum c_{pn}/n^s\right).$$

Hvis residuet af $\sum c_{pn}/n^s$ i forhold til Z(s) i $s = \lambda$ er α, er residuet af $Z^{h/p}(s)$ i forhold til Z(s) givet ved

$$\alpha/p^\lambda + 1/\phi(p) \left(\sum e(h/p)^j \left(\sum_{r\varepsilon T} \chi_r(j)^{-1}\right)\right)(1 - \alpha/p^\lambda).$$

Er T = {1} er $\sum e(h/p)^j (\sum \chi_r(j)^{-1}) = \sum e(h/p)^j = \mu(p) = -1$.

Hvis k er sammensat må vi fortsætte disse overvejelser, dette vil vi dog kun gøre i de konkrete tilfælde.

Eksempler

1. **$\sum \log p\, x^n$ $(n = p^r)$: res $Z^{h/k}(s) = \mu(k)/\phi(k)$ res $Z(s)$** For rækken $\sum \Lambda_n x^n$, hvor $\Lambda_n = \log p$ hvis $n = p^r$ (p primtal, $r > 0$) og ellers 0, er zetafunktionen $Z_\Lambda(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, derfor er $\lambda = 1$ og $c^0 = 1$. Vi har (for k vilkårlig)

$$
\begin{aligned}
Z^{h/k}{}_\Lambda(s) &= \sum e(h/k)^n \Lambda_n/n^s \\
&= \sum_{\substack{j=1\\(j,k)=1}}^{k-1} e(h/k)^j \sum_{l=1}^{\infty} \Lambda_{lk+j}/(lk+j)^s \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} e(h/k)^j \sum_{p,m\ p^m=j\ (\mathrm{mod}\ k)} \log p/p^{ms} \\
&= 1/\phi(k) \sum_{j\varepsilon(Z/kZ)^*} e(h/k)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_p\sum_m \chi_r(p^m) \log p/p^{ms}.
\end{aligned}
$$

Hvis $\chi_r(n) = 1$ på alle primtalspotenser er $r = 1$, i modsat fald er bidraget fra r en holomorf funktion. Vi vil finde et udtryk for opspaltningen, men allerede nu kan vi se at forholdet mellem residuerne af $Z^{h/k}{}_\Lambda(s)$ og $Z_\Lambda(s)$ i $s = \lambda$ er $\mu(k)/\phi(k)$, da $\sum e(h/k)^j = \mu(k)$.

2. **$\sum \log p\, x^n$ $(n = p)$: res $Z^{h/k}(s) = \mu(k)/\phi(k)$ res $Z(s)$** For $Z'_p(s)$ - zetafunktionen til $-\sum \log p\, x^p$ - som er lig $\sum \mu(m)\, \zeta'(ms)/\zeta(ms)$ $(m \geq 1)$, er $\lambda = 1$ og residuet af $Z'_p{}^{h/k}(s)$ i forhold til $Z'_p(s)$ er $-\mu(k)/\phi(k)$.

3. **$\sum \underline{\sigma}_n x^n$: res $Z^{h/k}(s) = \mu(k)/k$ res $Z(s)$** For $Z_{\underline{\sigma}}(s) = -\zeta(s)\sum mZ'_p(ms - 1)$ $(m \geq 1)$ (side 33), er $\lambda = 2$ og $c^0 = \zeta(2)$. Lad for $m\ \varepsilon\ \mathbb{N}$ m_0 være

produktet af m's primfaktorer. Vi vil vise at residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ er $\mu(k_0)k_0/k^2$, altså $\mu(k)/k$ hvis k er kvadratfri.

Vi antager først at k er ulige. Hvis k er et primtal p er

$$\sum e(h/p)^n\, \underline{\sigma}_n/n^s = 1/p^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s + 1/\phi(p) \sum_{j=1}^{p-1} e(h/p)^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_{p|^c n} \chi_r(n)\, \underline{\sigma}_n/n^s$$

$$= (1/p^s + (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/p^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s + \ldots$$

hvor resten er regulær i s = 2. Da $\underline{\sigma}_{pn} = \underline{\sigma}_p + \underline{\sigma}_n$ er $\sum \underline{\sigma}_{pn}/(pn)^s = \underline{\sigma}_p/p^s\, \zeta(s) + 1/p^s\, Z_{\underline{\sigma}}(s)$, altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$1/p^2 + \mu(p)/\phi(p))(1 - 1/p^2) = -1/p.$$

Hvis k er produktet af to forskellige primtal p og q er

$$\sum e(h/pq)^n\, \underline{\sigma}_n/n^s = 1/p^s \sum e(h/q)^n\, \underline{\sigma}_n/n^s + 1/q^s \sum e(h/p)^n\, \underline{\sigma}_n/n^s$$
$$- 1/(pq)^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s + (\mu(pq)/\phi(pq))(1 - 1/p^s - 1/q^s + 1/(pq)^s) \sum \underline{\sigma}_n/n^s + \ldots$$

hvor resten er regulær i s = 2. Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$(1/p^2)(-1/q) + (1/q^2)(-1/p) - 1/(pq)^2$$
$$+ (\mu(pq)/\phi(pq))(1 - 1/p^2 - 1/q^2 + 1/(pq)^2)$$

$$= 1/(pq).$$

Generelt er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ for k ulige lig $\mu(k_0)k_0/k^2$.

For k lige antager vi at k er 2 eller 2p. Hvis k = 2 er (på nær en funktion der er regulær i s = 2)

$\sum e(1/2)^n \underline{\sigma}_n/n^s = \sum (-1)^n \underline{\sigma}_n/n^s$

$= \sum \underline{\sigma}_n/n^s$ (n lige) - $\sum \underline{\sigma}_n/n^s$ (n ulige)

$= (1/2^s - (1 - 1/2^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s = (2/2^s - 1) \sum \underline{\sigma}_n/n^s.$

Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig -1/2.

Hvis k = 2p er (på nær en funktion der er regulær i s = 2)

$\sum e(h/2p)^n \underline{\sigma}_n/n^s$

$$= 1/2^s \sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s + 1/p^s \sum e(h/2)^n \underline{\sigma}_n/n^s - 1/(2p)^s \sum \underline{\sigma}_n/n^s$$
$$+ 1/\phi(p) \sum_{j=1\ j \text{ ulige } j\neq p}^{2p-1} e(h/(2p))^j \sum_{r=1}^{\phi(p)} \chi_r(j)^{-1} \sum_{(n,2p)=1} \chi_r(n) \underline{\sigma}_n/n^s$$

$= 1/2^s \sum e(h/p)^n \underline{\sigma}_n/n^s$

$+ ((1/p^s)(2/2^s - 1) - 1/(2p)^s - (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/2^s - 1/p^s$
$+ 1/(2p)^s)) \sum \underline{\sigma}_n/n^s$

da $\sum_{j=1\ j \text{ ulige } j\neq p}^{2p-1} e(h/(2p))^j = -\mu(p).$

Altså er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig

$$(1/2^2)(-1/p) + (1/p^2)(-1/2) -$$
$$1/(2p)^2 - (\mu(p)/\phi(p))(1 - 1/2^2 - 1/p^2 + 1/(2p)^2)$$
$$= 1/(2p).$$

Generelt er residuet for $Z^{h/k}{}_{\underline{\sigma}}(s)$ i forhold til $Z_{\underline{\sigma}}(s)$ lig $\mu(k_0)k_0/k^2$.

I disse eksempler aftager det principale residuum for $Z^{h/k}(s)$ med voksende k. Hvis θ er irrational er $Z^{\theta}(s)$ derfor regulær i punktet $s = \lambda$.

Tallene θ_i skal altså være rationale. Vi vælger et naturligt tal N og lader θ_i-erne være brøkerne h/k (k = 1, 2, ..., N, h = 0 for k = 1, og h = 1, ..., k - 1, h primisk med k, for k > 1) ordnet leksikografisk ($\theta_0 = 0$). Intervallerne der skal udgøre en opdeling af [0, 1] og hver indeholde en af disse brøker, dannes ved hjælp af Farey-intervaller: vi starter med brøkerne 0/1 og 1/1 og danner succesivt nye brøker (der skrives på uforkortelig form) således: hvis p/q og p'/q' er to nabobrøker, da er brøken (p + p')/(q + q') (som ligger imellem disse) igen en brøk i rækken. Vi fortsætter til alle brøkerne h/k er med. Hvis p'/q' og p"/q" er brøkerne umiddelbart til venstre og højre for h/k, lader vi $I_{h,k}$ være intervallet [h/k - 1/(k(k + q')), h/k + 1/(k(k + q"))] og (idet 0 og 1 identificeres), vi lader $I_0 = I_1$ være "intervallet" sammensat af [0, 1/(1 + N)] og [1 - 1/(1 + N), 1].

Goldbachs formodning - formel for ν_n

Vi vil udlede en tilnærmelsesformel for funktionen $\underline{\nu}_n$ givet ved $\sum \underline{\nu}_n x^n = (\sum \log p\, x^p)^2$. Da zetafunktionen til $\sum \log p\, x^p$ er $-Z'_p(s)$ og da $-Z'_p{}^{h/k}(s)$ har principal pol i s = 1 med residuum $\mu(k)/\phi(k)$, er for $x = e(h/k)e^{-y}$

$$\sum \log p\, x^p = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, (-Z'_p{}^{h/k}(s))\, ds = \mu(k)/\phi(k)\, y^{-1} + ...$$

Heraf følger at

$$1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, Z^{h/k}\underline{\nu}(s)\, ds = (\mu(k)/\phi(k)\, y^{-1})^2 + ...$$

og derfor er

$$c_n = 1/(2\pi i) \int_{b-\pi i}^{b+\pi i} ((\mu(k)/\phi(k))y^{-1})^2\, e^{ny}\, dy = (\mu(k)/\phi(k))^2\, n.$$

Følgelig er

$$\underline{\nu}_n = \iota(n)\, n + \ldots$$

hvor $\iota(n) = \sum\sum e(-h/k)^n\, (\mu(k)/\phi(k))^2$ ($k \geq 1$ og $h = 1, 2, \ldots, k - 1$, h primisk med k, $h = 0$ for $k = 1$). Vi skal altså udregne

$$\iota(n) = \sum A_k \; (k \geq 1)$$

hvor

$$A_k = (\sum e(-h/k)^n)(\mu(k)/\phi(k))^2$$

- sum over $h = 1, \ldots, k - 1$, h primisk med k, $h = 0$ for $k = 1$. Da $A_{k'k''} = A_{k'}A_{k''}$ for $(k', k'') = 1$ og $A_p{}^r = 0$ for p primtal og $r > 0$, er

$$\iota(n) = \prod (1 + A_p) \; (p \text{ primtal}).$$

Men $A_p = -1/(p - 1)^2$ hvis p ikke er divisor i n og $A_p = 1/(p - 1)$ hvis p er divisor i n, derfor er $\iota(n) = 0$ for n ulige og for n lige har vi

$$\underline{\nu}_n = 2E_0E\, n + \ldots$$

hvor

$$E_0 = \prod (1 - 1/(p - 1)^2) \; (p \text{ ulige primtal}) = 0.6601618\ldots$$

og

$$E = \prod (p - 1)/(p - 2) \; (p \text{ ulige primdivisor i } n).$$

For n omkring 4.000.000 ligger forholdet mellem og $\underline{\nu}_n$ og tilnærmelsen i intervallet]0.99, 1.003[.

Man kan få en tilnærmelsesformel for ν_n ved blot at dividere med $\log(n)^2$:

$$\nu_n \approx 2E_0E\, n/(\log n)^2.$$

Denne formel blev første gang postuleret af Sylvester i 1871 (ved et statistisk argument, og tallet E_0 var ikke helt korrekt), og den er ikke særlig god. Ønskes en bedre, må $-Z'_p(s)$ som er zetafunktionen til $\sum \log p\, x^p$ erstattes med $Z_p(s)$ som er zetafunktionen til $\sum x^p$, og da denne er ikke-meromorf men med meromorf afledet, kan der anvendes partiel integration. Så skal $(\mu(k)/\phi(k))^2\, y^{-2}$ erstattes med

$$(\mu(k)/\phi(k))^2\Big(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\Gamma(t)\, dt\Big)^2$$

og i denne skal man indføre integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$, altså udregne

$$1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny} \Big(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\Gamma(t)\, dt\Big)^2 dy.$$

Hvis $\int y^{-t}\Gamma(t)\, dt$ approksimeres med en endelig sum, og man kvadrerer denne og indfører integrationen $1/(2\pi i) \int e^{ny} \ldots dy$, og tager grænseværdien, fås

$$\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1} n^{x+y-1}B(x, y)\, dxdy$$

hvor $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ er betafunktionen. Og benyttes at

$$B(x, y) = \int_{0}^{\infty} t^x/(1 + t)^{x+y}\, dt/t$$

fås

$$1/(2\pi i) \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} e^{ny} \Big(\int_{-\infty}^{1} y^{-t}\Gamma(t)\, dt\Big)^2 dy = \int_{0}^{n} dt/(\log(t)\log(n - t))$$

$$= 2 \int_{0}^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)).$$

Altså er

$$\nu_n = 4E_0E \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)) + \ldots$$

For n = 63124 er antallet af opspaltninger 429, den dårlige formel giver 350 og den forbedrede formel giver 432.

Den dårlige tilnærmelse $\nu_n \approx 2E_0E\, n/(\log n)^2$ kan også forbedres betydeligt, hvis vi erstatter n/(log n) med π_n, det vil sige erstatter $n/(\log n)^2$ med $\pi_n{}^2/n$. For den ovennævnte n-værdi fås 430.

Da $\iota(n) > 0$ (for n lige) er det at bevise Goldbachs formodning ensbetydende med at bevise at restleddet i disse formler er forsvindende i forhold til det principale led. I Hardy og Littlewoods afhandling [4], som vores fremgangsmåde er hentet fra, er formlen udledt i det generelle tilfælde hvor $\nu^r{}_n$ $(r \geq 2)$ er antallet af (ordnede) opspaltninger $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ i r ulige primtal. $\nu^r{}_n$ er altså givet ved $\sum \nu^r{}_n x^n = (\sum x^p)^r$. Det er dog $\underline{\nu}^r{}_n$ - givet ved $\sum \underline{\nu}^r{}_n x^n = (\sum \log x^p)^r$ - der undersøges, og formlen for $\underline{\nu}^r{}_n$ lyder

$$\underline{\nu}^r{}_n = 2E^r{}_0E^r\, n^{r-1}/(r - 1)! + \ldots$$

hvor

$$E^r{}_0 = \prod (1 - (-1)^r/(p - 1)^r) \text{ (p ulige primtal)}$$

og

$$E^r = \prod ((p - 1)^r + (-1)^r(p - 1))/((p - 1)^r - (-1)^r)) \text{ (p ulige primdivisor i n).}$$

Hardy og Littlewood foretager en vurdering af restleddet. Af denne fremgår at hvis det for zetafunktionerne $L_r(s)$ gælder at der findes et tal $\Theta < 3/4$ således at $\mathrm{Re}(s) \leq \Theta$ for ethvert nulpunkt s (altså en mildere udgave af Riemanns hypotese), da er restleddet af mindre størrelsesorden end $n^{r-1-(3/4-\theta)} \log(n)^B$ og derfor forsvindende i forhold til det principale led.

Men dette gælder kun for $r > 2$ - hvorfor argumentet i vurderingen svigter for $r = 2$ forklares sidst i bogen.

Dette resultat, $r > 2$, har mindre dybde end tilfældet $r = 2$, og det kan da også bevises, idet den milde Riemann hypotese kan undværes, se side 63.

Formlen for ν_n kan generaliseres til det tilfælde hvor vi har givet et (lille) primtal p' og det gælder om at finde antallet ${}^{p'}\nu_n$ af opspaltninger af n af formen $n = p + p'q$ (p og q primtal). For $p' \neq 2$ er ${}^{p'}\nu_n = 0$ hvis n er ulige eller hvis p' går op i n, i modsat fald er

$$ {}^{p'}\nu_n \approx p'/(p'-1)^2 \; 2E_0E \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t)) $$

- for p' = 17 og n = 4444444 er antallet 4124 og formlen giver 4137. For p' = 2 er ${}^{p'}\nu_n = 0$ for n lige og for n ulige er tilnærmelsen givet ved formlen for ν_n anvendt på n ulige.

Formel for a_n

Funktionen $\underline{a}_n$ er givet ved $\sum \underline{a}_n x^n = (\sum \log p \; x^p)(\sum \underline{\sigma}_j x^j)$. For $x = e(h/k)e^{-y}$ er

$$ \sum \log p \; x^p = 1/(2\pi i) \int y^{-s} \, \Gamma(s) \, (-Z'_p{}^{h/k}(s)) \, ds = \mu(k)/\phi(k) \; y^{-1} + ... $$

og

$$ \sum \underline{\sigma}_j x^j = 1/(2\pi i) \int y^{-s} \, \Gamma(s) \, Z^{h/k}_{\underline{\sigma}}(s) \, ds = \mu(k)/k \; \zeta(2) \; y^{-2} + ... $$

derfor er

$$ 1/(2\pi i) \int y^{-s} \, \Gamma(s) \, Z^{h/k}_{\underline{a}}(s) \, ds = \mu(k)^2/(k\phi(k)) \; \zeta(2) \; y^{-3} + ... $$

og af formlen for c_n får vi (da $\Gamma(3) = 2$) at

$$\underline{a}_n = \iota^a(n)\ \zeta(2)/2\ n^2 + ...$$

hvor $\iota^a(n) = \sum e(-h/k)^n\ \mu(k)^2/(k\phi(k))$ ($k \geq 1$ og $h = 1, 2, ..., k - 1$, h primisk med k, $h = 0$ for $k = 1$). Vi skal altså udregne

$$\iota^a(n) = \sum_{k \text{ ulige}} ((\sum e(-h/k)^n)\ \mu(k)^2/(k\phi(k)) + (\sum e(-h/(2k))^n)\ \mu(k)^2/(2k\phi(k)))$$

da $\mu(k) = 0$ hvis k er delelig med 4, og da $\sum e(-h/(2k))^n = (-1)^n \sum e(-h/k)^n$ bliver dette

$$= (1 + (-1)^n/2) \sum B_k \text{ (k ulige)}$$

hvor $B_k = (\sum e(-h/k)^n)\ \mu(k)^2/(k\phi(k))$ (sum over $h = 1, ..., k - 1$, h primisk med k, $h = 0$ for $k = 1$). Da $B_{k'k''} = B_{k'}B_{k''}$ for $(k', k'') = 1$ og $B_{p^r} = 0$ for p primtal og $r > 1$, er

$$\kappa^a(n) = (1 + (-1)^n/2) \prod (1 + B_p) \text{ (produkt over de ulige primtal).}$$

Men $B_p = -1/(p(p - 1))$ hvis p ikke er divisor i n og $B_p = 1/p$ hvis p er divisor i n, derfor er

$$\underline{a}_n = (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)/2\ E^a{}_0 E^a\ n^2 + ...$$

hvor

$$E^a{}_0 = \prod (1 - 1/(p(p - 1))) \text{ (p ulige primtal)} = 0{,}7479...$$

og

$$E^a = \prod (p^2 - 1)/(p^2 - p - 1) \text{ (p ulige primdivisorer i n).}$$

For n omkring 50.000 ligger forholdet mellem $\underline{a}_n$ og tilnærmelsen i intervallet]0.95, 1.02[.

For a_n har vi denne (dårlige) tilnærmelse

$$a_n \approx (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)/2\ E^a{}_0E^a\ n^2/(\log n)^2.$$

Den kan forbedres betydeligt hvis n/log n erstattes med π_n. For n omkring 50.000 ligger forholdet mellem a_n og tilnærmelsen i så fald i intervallet]0.99, 1.08[. Vi kan også få en betydeligt forbedret tilnærmelse ved at anvende samme metode som for ν_n:

$$a_n \approx (1 + (-1)^n/2)\ \zeta(2)\ E^a{}_0E^a\ n \int_0^{n/2} dt/(\log(n/2 + t)\log(n/2 - t))$$

- for n = 6666 er a_n = 4119474 og formlen giver 4117187.

Da $\sum \log p$ (p primtal < n) = $\theta_n \approx n$ (side 33), kommer formodningen for $\underline{a}_n$ (i indledningen) til at lyde:

$$\underline{b}_n < \underline{a}_n \text{ for n lige}$$

- og tilstrækkelig stor. Da $\underline{b}_n \approx \zeta(2)/2\ n^2$ betyder dette at vi må have $E^a{}_0E^a > 2/3$, og denne ulighed er altid opfyldt da $E^a{}_0E^a > 0{,}75$, så formodningen synes at være sand.

I 1957 udledte Hooley denne imponerende formel for opspaltning af et tal n (lige eller ulige) i summen af et primtal og to kvadrattal:

$$\sum_{p + a^2 + b^2 = n} 1 = E^a{}_0E_1E_2\ \pi\ \pi_n/\log(n)$$

hvor $E^a{}_0$ er som ovenfor (0,7479...) og hvor (p ulige primtal)

$$E_1 = \prod (p - 1)^2/(p^2 - p + 1) \text{ (p divisor i n, p mod 4 = 1)}$$

$$E_2 = \prod (p^2 - 1)/(p^2 - p - 1) \text{ (p divisor i n, p mod 4 = 3)}$$

For n = 444411 er antallet 12050 og formlen giver det samme. Denne formel kan faktisk bevises. Den blev udledt af Hardy&Littlewood ved deres cirkelmetode, men de kunne ikke bevise den, selv med anvendelse af en generaliseret Riemann formodning. Hookley udledte den ved anvendelse af Halberstams formodning (side 40), men den blev senere bevist ved anvendelse af Bombieri-Vinogradovs middelværdisætning (side 40).

En variant af metoden

Ved at ændre lidt i fremgangsmåden ovenfor, kan man finde tilnærmelsesformler for summer af formen

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n+k} b_n \text{ for } N \to \infty$$

hvor k er et fast tal. Lad $\sum a_i x^i$ og $\sum b_j x^j$ være to potensrækker som opfylder betingelserne på side 41, lad k ε Z og r ε]0, 1[. Da er

$$1/(2\pi i) \int_C (\sum a_i r^i x^i)(\sum b_j r^j x^{-j}) x^k \, dx/x = r^k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} b_n r^{2n}$$

hvor C er en lille cirkel om 0. Heri sætes $x = e^{-y}$ og $r = e^{-1/N}$, og benyttes at

$$\sum a_i r^i x^i = 1/(2\pi i) \int (1/N - y)^{-s} \Gamma(s) Z_a(s) \, ds$$

og

$$\sum a_j r^j x^{-j} = 1/(2\pi i) \int (1/n + y)^{-s} \Gamma(s) Z_b(s) \, ds$$

skal vi udregne integraler af formen

$$1/(2\pi i) \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} (1/N + y)^{-\alpha} (1/N - y)^{-\beta} e^{y(n-k)} \, dy.$$

Det er meningen at n er det faste tal k, så derfor benytter vi (i stedet for $1/(2\pi i) \int e^{ny} y^{-s}\, dy = n^{s-1}/\Gamma(s)$) denne formel:

$$1/(2\pi i) \int_{-\infty i}^{\infty i} (1/N + y)^{-\alpha}(1/N - y)^{-\beta}\, dy = (N/2)^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+ \beta-1)(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)).$$

Der skal nu benyttes følgende "Tauberiske sætning" som skyldes Hardy & Littlewood (og hvis omvending for $\alpha = 0$ er Abels sætning):

Lad $\sum c_n r^n$ være en potensrække med positive led og konvergensradius $\geq$ 1 og antag at

$$\sum c_n r^n \approx A(1/(1 - r))^{\alpha} \text{ for } r \rightarrow 1$$

hvor $\alpha \geq 0$, da gælder

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \approx AN^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1) \text{ for } N \rightarrow \infty.$$

(her kan evt. forekomme led af formen $(1/(1 - r))^{\beta}$). Så hvis udregningen af integralet langs C er af formen

$$A(1/(1 - r^2))^{\alpha}\ (\approx A(N/2)^{\alpha}) + ...$$

følger af Hardy & Littlewoods sætning at

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n+k} b_n \approx AN^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1) \quad \text{for} \quad N \rightarrow \infty$$

da $r^k \rightarrow 1$.

I sådanne resultater skal det selvfølgelig bevises at restleddet er forsvindende - i de følgende eksempler er dette ikke blevet bevist.

Eksempler

1. For $\sum a_i x^i = \sum b_j x^j = \sum \log p\ x^p$ får vi for k lige (analogt med udregningen på side 51):

$$\sum_{p \text{ primtal}<N,\ p+k \text{ primtal}} \log(p + k) \log p \approx 2\ E_0 E\ N \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

- E_0 og E som på side 52, E mht. k. Vi har $\sum a_i x^i = \sum b_j x^j = \sum x^p$.
Resultatet kan formuleres:

$$\text{antallet af par af primtal hvis differens er k er} \approx 2\ E_0 E \int_0^N dt/(\log t)^2.$$

For k lige er det altså uendelig mange primtal således at p + k også er et primtal - bemærk at antallet afhænger af k's opspaltning i primfaktorer ganske som i antallet af opspaltninger af k i summen af to primtal. For k = 2 (eller en potens af 2) har vi altså

$$\text{antallet af primtalstvillinger} < N \approx 1{,}32 \int_0^N dt/(\log t)^2.$$

For k = 64 og N = 10^6 er det sande antal 8261 og formlen giver 8264. Bemærk at for k = 6 er antallet omkring dobbelt så stort. Primtalstvillingerne ligger ikke særligt tæt: rækken $\sum (1/p + 1/(p+2))$ (sum over alle primtalstvillingerne) er nemlig konvergent (Viggo Brun, 1919).

2. For $\sum a_i x^i = \sum \log p\ x^p$ og $\sum b_j x^j = \sum x^{m^2}$ (som har zetafunktion $\zeta(2s)$) og k = -1 kan vi få denne formel

$$\sum_{m^2+1 \text{ primtal}<N} \log(m^2 + 1) \approx C \sqrt{N}$$

hvor

$$C = \prod (1 - ((-1/p))/(p - 1)) \ (p \text{ ulige primtal}) = 1{,}37$$

og hvor ((-1/p)) er 1 hvis -1 (mod p) er et kvadrattal og ellers -1.

For $\sum a_i x^i = \sum x^p$ fås

antallet af primtal p mindre end N af formen $m^2 + 1 \approx C/2\ \mathrm{Li}(\sqrt{N})$ - for $N = 10^7$ er antallet 315 og formlen giver 318.

Chens sætning og en generalisering

I 1966 beviste Chen Jing Run at ethvert tilstrækkeligt stort lige tal kan skrives som en sum af et primtal og et tal der enten er et primtal eller et produkt af to primtal. Ved hjælp af den såkaldte sigtemetode (side 64) beviste han at antallet af disse opspaltinger af n er større end $0{,}098 \cdot E_0 E\ n/(\log n)^2$ (E_0 og E som på side 51) - han opstillede altså ikke en formel for antallet og beviste at restleddet i denne er forsvindende. I 1973 udgav han et bevis hvor tallet 0,098 er hævet til 0,67 (side 67).

Da Chens antal ${}^2\nu_n$ er større end Goldbachs antal ν_n, og da Goldbachs antal opfylder $\pi_n/n < \nu_n/\pi_n$, vil Chens antal nok opfylde en tilsvarende ulighed $\pi_n/n < {}^2\nu_n/{}^2\pi_n$, hvor ${}^2\pi_n$ er antallet af tal < n som enten er et primtal eller et produkt af to primtal.

Lad ${}^r p_n$ være 1 hvis antallet af primfaktorer i n med multiplicitet $\leq$ r og ellers 0. Da er ${}^1 p_n = 1$ hvis n er et primtal og ellers 0, og ${}^2 p_n = 1$ hvis n er et primtal eller et produkt af to primtal og ellers 0. Og da $\sum x^p = \sum {}^1 p_n x^n$, kan $\sum \pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum x^p)$ generaliseres til $\sum {}^r\pi_n x^n = (\sum x^n)(\sum {}^r p_n x^n)$, så ${}^r\pi_n$ er antallet af tal < n som har højst r primfaktorer. Og $\sum \nu_n x^n = (\sum x^p)(\sum x^p)$ kan generaliseres til $\sum {}^r\nu_n x^n = (\sum x^p)(\sum {}^r p_n x^n)$, så ${}^r\nu_n$ antallet af opspaltninger af n = p + q således at p et er primtal og hvor q har højst r primfaktorer. Vi formoder at uligheden

$$\pi_n/n < {}^r\nu_n/{}^r\pi_n$$

gælder for alle r - for n tilstrækkelig stor. Bemærk at ${}^r\pi_n \to n$ og ${}^r\nu_n \to \pi_n$ for $r \to \infty$.

Tilsvarende kan funktionerne b_n og a_n generaliseres. Lad ${}^r\sigma_n$ være σ_n hvis antallet af primfaktorer i n med multiplicitet $\le r$ og ellers 0. Da er ${}^1\sigma_n = n$ hvis n er et primtal og ellers 0, og ${}^2\sigma_n = n$ hvis n er et primtal og $= p + q$ hvis $n = pq$ (primtal) og ellers 0. Vi har ${}^r\sigma_n \to \sigma_n$ for $r \to \infty$. b_n og a_n er givet ved henh. $\sum b_n x^n = (\sum x^n)(\sum \sigma_n x^n)$ og $\sum a_n x^n = (\sum x^p)(\sum \sigma_n x^n)$, så generaliseringen må være givet ved

$$\sum {}^r b_n x^n = (\sum x^n)(\sum {}^r\sigma_n x^n)$$

og

$$\sum {}^r a_n x^n = (\sum x^p)(\sum {}^r\sigma_n x^n)$$

Altså ${}^r b_n = \sum {}^r\sigma_i$ ($i < n$) og ${}^r a_n = \sum {}^r\sigma_{n-p}$ (p primtal $< n$). Vi har ${}^r b_n \to b_n$ og ${}^r a_n \to a_n$ for $r \to \infty$, og vi må formode at vores formodning $\pi_n/n < a_n/b_n$ kan generaliseres til

$$\pi_n/n < {}^r a_n/{}^r b_n.$$

Denne sammenlignes med

$$\pi_n/n < {}^r\nu_n/{}^r\pi_n.$$

Vi har altså at for $r \to \infty$ gælder ${}^r\nu_n/{}^r\pi_n \to \pi_n/n$ og ${}^r a_n/{}^r b_n \to a_n/b_n$. For små r-værdier svinger ${}^r\nu_n/{}^r\pi_n$ stærkt med n, men flader ud og nærmer sig langsomt til π_n/n som er næsten konstant. For alle r er $a_n/b_n < {}^r a_n/{}^r b_n$ og tallene ${}^r a_n/{}^r b_n$ aftager jævnt i størrelse, og for r = 1 og r = 2 afviger ${}^r a_n/{}^r b_n$ meget fra a_n/b_n, men allerede ${}^3 a_n/{}^3 b_n$ er tæt på a_n/b_n. Også tallene ${}^r\nu_n/{}^r\pi_n$ synes at aftage jævnt, men man skal op på meget store n-værdier. Der synes altså at gælde:

$$a_n/b_n < {}^r a_n/{}^r b_n < {}^2 a_n/{}^2 b_n < {}^1 a_n/{}^1 b_n$$

og

$$\pi_n/n < {}^r \nu_n/{}^r \pi_n < {}^2 \nu_n/{}^2 \pi_n < \nu_n/\pi_n$$

for n tilstrækkeligt stor. Det bemærkelsesværdige er, at ${}^1\nu_n/{}^1\pi_n$ (= ν_n/π_n) er det største af tallene ${}^r\nu_n/{}^r\pi_n$ og ${}^1a_n/{}^1b_n$ er det største af tallene ${}^r a_n/{}^r b_n$, og men kan ikke bevise at disse største tal er større end 0, hvorimod det bliver nemmere og nemmere at bevise at de mindre tal er større end 0.

Baggrund for formodningen $b_n/n < a_n/\pi_n$

Formodningen $b_n/n < a_n/\pi_n$ (for n lige) stammer fra følgende betragtning, som har forbindelse til Goldbachs formodning. For det lige tal 2n lyder en let variant af formodningen således: a_{2n}, som er $\sum \sigma_{2n-p}$ (p primtal < 2n), erstattes med $\sum \sigma_{2n-p}$ (p primtal i intervallet]n, 2n[) og π_n erstattes med antallet af primtal i]n, 2n[(dette antal nærmer sig asymptotisk til π_n). Hvis vi sætter

$$D = \sum \sigma_{2n-p} \text{ (p primtal i]n, 2n[)}$$

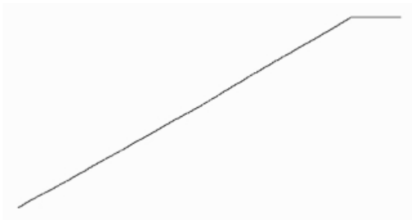
og

$$S = \#\{\text{primtal p i]n, 2n[}\}(\sum \sigma_i \ (i < n))/n$$

kommer varianten til at lyde: S < D.

For alle n er $\sigma_n \leq n$ og der gælder kun lighed når n er et primtal. Hvis tallet q - σ_q er lille - mindre end et givet tal - vil vi kalde q et næsten-primtal mht. det givne tal. Antallet af primtal p < n således at q = 2n - p er et næsten-primtal mht. n (q - σ_q < n) består af to dele: de p hvor q er et primtal og de p hvor q ikke er et primtal. Det første antal er Goldbachs antal - altså antallet af opspaltninger af 2n i summen af to primtal - og dette har vi betegnet ν_{2n}. Det andet antal betegnes ν^*_{2n}.

Hvis p + q er en opspaltning af 2n i to primtal, er $\sigma_p + \sigma_q = 2n$. Hvis p + q er en opspaltning af 2n i to tal således at $n < \sigma_p + \sigma_q < 2n$, er enten p eller q men ikke begge et primtal. For disse opspaltninger ligger tallene $(\sigma_p + \sigma_q)/n$ imellem 1 og 2, men hvis de ordnes efter størrelse, ligger de næsten på en ret linie (den skrå linie):



Tallene ligger under den rette linie, så deres middelværdi er mindre end 3/2. Denne ulighed kan omskrives til

$$D + Z < \nu_{2n} + \nu^*_{2n}$$

hvor Z er forsvindende i forhold til de øvrige tal. Endvidere synes at gælde at $\nu^*_{2n} < S$, således at der i alt synes at gælde:

$$\nu^*_{2n} < S < D < \nu_{2n} + \nu^*_{2n}.$$

Af de tre uligheder følger Goldbachs formodning: $\nu_{2n} > 0$. Den første ulighed synes at kunne bevises ved Chens metode, den anden, som er ensbetydende med $b_{2n}/(2n) < a_{2n}/\pi_{2n}$, kan måske også bevises. Af de primtal p < 2n som bidrager til $\nu_{2n} + \nu^*_{2n}$, er andelen af dem hvor q = 2n - p højst har to primfaktorer langt den største.

Vinogradovs bevis for at $\nu^3_n > 0$

Hardy & Littlewood generaliserede tilnærmelsesformelen for ν_n til ν^r_n ($r \geq 2$) (antallet af måder hvorpå tallet n kan skrives som summen af netop r ulige primtal), og for r > 2 beviste de at restleddet er forsvindende i forhold til det principal led under forudsætning af en mild version af Riemanns hypotese for visse zetafunktioner. Men strengt taget havde man altså endnu ikke bevist at for selv et nok så stort tal r, kan ethvert tilstrækkelig stort tal n (lige eller ulige alt eftersom r er lige eller ulige) skrives som summen af r ulige primtal - og dette måtte da kunne gøres uden ubeviste antagelser.

I 1937 forsøgte Vinogradov sig med en variant af Hardy & Littelewoods cirkelmetode, og denne metode afslørede at man i stedet for den ubeviste Riemann hypotese kan nøjes med en umiddelbart forinden bevist sætning om primtallenes fordeling, nemlig Siegel-Walfisz' sætning (side 38), så hermed var Hardy & Littlewoods resultat komplet bevist.

Lad os skitsere Vinogradovs bevis. Vi definerer funktionen $F:[0, 1] \to C$ ved

$$F(x) = \sum e(xp) \text{ (p ulige primtal} \leq n).$$

Da

$$\int_0^1 e(xk)\,dx = 1 \text{ for } k = 0 \text{ og } = 0 \text{ for } k \neq 0$$

er

$$\nu^3{}_n = \int_0^1 F(x)^3 e(-xn)\,dx.$$

Intervallet [0, 1] deles nu op i to dele som hver er foreningen af endeligt mange intervaller - "store buer" og "små buer": Hvis vi sætter $\tau = (\log n)^{B'}/n$ og $Q = (\log n)^{B''}$, hvor B' og B" er reelle tal der skal vælges således at de nedenfor optrædende tal A' og A" får de ønskede værdier, da er de store buer foreningen af intervallerne

$$[h/k - \tau, h/k + \tau] \quad (k = 1, ..., [Q], h = 1, ..., k - 1, h \text{ primisk med } k, h = 0 \text{ for } k = 1)$$

(som er disjunkte når n er tilstrækkelig stor). Af Siegel-Walfisz' sætning følger at inden for den store bue indeholdende h/k, altså for $|\varepsilon| < \tau$, gælder

$$F(h/k + \varepsilon) = \mu(k)/\phi(k) \sum_{i=2}^{n-1} e(\varepsilon i)/\log i + O(n/e^{A\sqrt{\log n}})$$

h
vor A er bestemt ved B". Indsættes dette udtryk for F(h/k + ε) i formlen for $\nu^3{}_n$ og integreres over de store buer fås

$$1/2\ E^3{}_0E^3\ n^2/(\log n)^3 + O(n^2/(\log n)^{A'})$$

hvor vi ved passende valg af B' og B" kan opnå at A' ≥ 4. Tilbage er en vurdering af F(x) på de små buer. Den siger at hvis man tildeler B' og B" passende værdier, kan man opnå at F(x) her er af mindre størrelsesorden end $n/(\log n)^{A''}$, hvor A" ≥ 3. Dette betyder at de små buers bidrag til $\mu^3{}_n$ er af mindre størrelsesorden end

$$n/(\log n)^{A''} \int_0^1 |F(x)|^2\, dx$$

og her er integralet af mindre størrelsesorden end n/(log n). Restleddet i formlen for $\nu^3{}_n$ er altså af mindre størrelsesorden end $n^2/(\log n)^4$.

Andre metoder til at "bevise" Goldbachs formodning

Som vi har demonstreret, er den komplekse funktionsteori et uundværligt redskab i teorien for primtallene. Ved hjælp af kompleks funktionsteori kan man udlede formler, men i formlerne er ofte et restled som det kan være svært at vurdere størrelsen af. For at opnå håndgribelige resultater har man forsøgt sig man andre metoder til tackle problemer der er beslægtet med Goldbachs formodning. De to vigtigste er i modsætning til den funktionsteoretiske metode elementære:

1. *Sigtemetoden* har sit udgangspunkt i Eratosthenes' (250 f.Kr.) metode til at opskrive alle primtallene mellem √n og n: først fjernes de tal der er delelige med 2, så fjernes de tal der er delelige med 3, og så videre, dette gøres for alle primtallene op til √n.

Lad for en delmængde A af $\mathbb{N}$ og r ε $\mathbb{N}$, F(A, r) være antallet af tal i A som er tilbage efter en sådan bortsigtning for primtallene op til r, altså som ikke er deleligt med noget primtal < r (ofte er det mest hensigtsmæssigt at fjerne restklasser fra A: for et primtal p og for et (relativt stort) antal tal h < p, fjernes tallene h + kp (k = 1, 2, ...) fra A).

Hvis $A_n = \{i(n - i) \mid i = 1, 2, ..., n - 1\}$ sætter vi $F(n, r) = F(A_n, r)$, altså antallet af tal af formen i(n - i) der ikke har primfaktorer < r. Hvis man kan bevise at der findes et n_0 således at $F(n, n^{1/3}) > 0$ for alle lige $n > n_0$, er Goldbachs formodning bevist, thi dette betyder at for et sådant lige n findes et i < n således at alle primdivisorerne i i(n - i) er større end $n^{1/3}$, følgelig kan (da n er lige) i(n - i) kun have to primfaktorer, og derfor er i og n - i er primtal. For k = 3, 4, ... betyder $F(n, n^{1/(k+1)}) > 0$ tilsvarende at n er summen af to tal der højst har k primfaktorer. Viggo Brun introducerede i 1919 en sigtemetode, og ved hjælp af denne viste han at $F(n, n^{1/10)}) > 0{,}2\, n/(\log n)^2$ for n tilstrækkelig stort, dette betyder at ethvert tilstrækkelig stort lige tal er summen af to tal der hver har højst 9 primfaktorer.

Atle Selberg angav i 1947 (i en afhandling på 4 sider) en genial forbedring af Bruns metode. Den bygger på den observation at hvis man til ethvert at tallene i = 1, ..., r knytter et reelt tal λ_i, hvor blot $\lambda_1 = 1$, da er

$$F(A, r) \le \sum_{a} \Big(\sum_{i|a} \lambda_i\Big)^2 = \sum \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \#\{a \,\varepsilon\, A \mid (i_1 i_2/\mathrm{mfd}(i_1, i_2))|a\}.$$

Det gælder nu om at vælge λ_i således at højre side er mindst mulig. Lad |A| være antallet af elementer i A og antag at der findes en multiplikativ funktion f(i) (altså $f(i_1 i_2) = f(i_1)f(i_2)$, for i_1 og i_2 primiske) således at for $i \le r$ er

$$\#\{a \,\varepsilon\, A \mid i|a\}/|A| = 1/f(i) + ...$$

således at 1/f(i) kan tolkes som sadsynligheden for at tal i A er delelige med i. Da er minimumsværdien af $\sum (\sum \lambda_i)^2$ givet ved $|A|/(\sum |\mu(i)|/f^*(i)$ $(i \le r))$, hvor $f^*(i) = \sum \mu(d)\, f(i/d)$ (sum over i's divisorer), hvilket ved

Möbius-inversion betyder at $f(x) = \sum f^*(i)\ (i|x)$, altså er $F(A, r) \leq$ denne størrelse.

Her skal man selvfølgelig sikre sig at resten er ubetydelig. Selberg anvender metoden på et enkelt eksempel: han viser at antallet af primtalstvillinger mindre end n er mindre end $10{,}6\ n/(\log n)^2$ for n tilstrækkeligt stor (sæt $A = \{i(i + 2) \mid i \leq n\}$ og $r = n^{1/2-\varepsilon}$) - formlen på side 62 (hvor restleddet i modsætning til disse resultater ikke kan bevises at være forsvindende) siger at antallet $\approx 1{,}32\ n/(\log n)^2$.

Selbergs formel blev videreudviklet af andre. For at kunne estimere F(A, r) bedre har man betjent sig af iterativ anvendelse af relationer der sammenknytter F(A, r) for forskellige r-værdier. Prototypen er følgende identitet og ulighed: Hvis F(A, p, r) er antallet af tal i A som er delelige med p og som ikke er deleligt med noget primtal $< r$, da er for $r' > r$

$$F(A, r') = F(A, r) - \sum_{r \leq p < r'} F(A, p, p),$$

og hvis F(A, b, r, r') er antallet af tal i A som ikke er delelige med primtal $p < r$ og som er delelige med højst b primtal p således at $r \leq p < r'$, da er

$$F(A, b, r, r') \geq F(A, r) - \Big(\sum_{r \leq p < r'} F(A, p, r)\Big)/(b + 1)$$

Ved hjælp af sådanne vurderinger af F(A, r) har man forbedret Bruns resultat. Det bedste resultat indtil nu skyldes Chen, der som sagt i 1966 beviste at ethvert tilstrækkeligt stort lige tal er summen af et primtal og et tal der højst har to primfaktorer. Vi vil skitsere Chens bevis:

Lad $P_{(1,2)}(n)$ være antallet af opspaltninger af n af formen $n = p + m$ hvor m har højst to primfaktorer. Idet $A_n = \{n - p \mid p \text{ primtal} < n\}$ sæt $P(n, r) = F(A_n, r)$ (altså antallet opspaltninger $n = p + m$ hvor intet primtal $< r$ går op i m) og $P(n, p, r) = F(A_n, p, r)$ (altså antallet af opspaltninger $n = q + m$ hvor p går op i m men intet primtal $< r$), og lad $\Xi(n)$ være antallet af opspaltninger af n af formen $n = p_1p_2p_3 + m$, hvor $n^{1/10} < p_1 \leq n^{1/3} < p_2 \leq (n/p_1)^{1/2}$ og hvor hver primfaktor i m er større end $n^{1/4}$.

Chen viser at

$$P_{(1,2)}(n) \geq P(n, n^{1/10}) - (\sum_{n^{1/10}<p\leq n^{1/3}} P(n, p, n^{1/10}))/2 - \Xi(n)/2 + O(n^{9/10}).$$

Ved hjælp af Bombieris middelværdisætning (side 39) og estimationer af de ovennævnte typer viser Chen, at for n tilstrækkeligt stor er de to første led tilsammen $\geq 2{,}6408\ E_0E\ n/(\log n)^2$, og af Bombieris middelværdisætning følger at for n tilstrækkeligt stor er $\Xi(n) \leq 3{,}9404\ E_0E\ n/(\log n)^2$. Af disse tre uligheder følger (idet 2,6408 - 3,9404/2 = 0,6706) at

$$P_{(1,2)}(n) \geq 0{,}67\ E_0E\ n/(\log n)^2.$$

2. *Tæthedsmetoden* bygger på følgende enkle teori som skyldes Schnirelman. Hvis A er en uendelig delmængde af $\mathbb{N}_0$, defineres tætheden af A som $\alpha = \inf_n(\#\{i \mid i \in A, i \leq n\} /n)$. Hvis $\alpha = 1$ er $A = \mathbb{N}_0$. Da gælder følgende regler, hvis A og B har tæthed α og β, og $C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ har tæthed χ:

1. $0 \in A$, $1 \in B \Rightarrow \chi \geq \alpha + \beta - \alpha\beta$,

2. $0 \in A$, $1 \in B$, $\alpha + \beta \geq 1 \Rightarrow \chi = 1$, det vil sige $C = \mathbb{N}_0$.

Heraf følger

3. $0 \in A$, $\alpha > 0 \Rightarrow$ der findes et $s \in \mathbb{N}$ således at $sA = \mathbb{N}_0$.

1. kan forfines til: $\chi \geq \alpha + \beta$ (Mann, 1942).

Lad nu A være $\{i \in \mathbb{N}_0 \mid i = 0$ eller $i = 1$ eller der findes primtal p og q således at $i = p + q\}$. Det følger af Schwarz ulighed at $(\sum \nu_i)^2 \leq n\sum \nu_i^2$ (sum over $i \leq n$), altså er for ethvert

$$\alpha \geq (\sum \nu_i)^2/(n\sum \nu_i^2)\ (i \leq n).$$

Ved hjælp af Bruns eller Selbergs metoder kan man se at der findes et C_1 således at for ethvert n og for $i \leq n$ er

$$\nu_i < C_1 \Big(\sum_{d|i \text{ d kvadratfri}} 1/d\Big)\, i/(\log n)^2$$

og man kan også se at der findes et $C_2 > 0$ således at for ethvert n er

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i > C_2\, n^2/(\log n)^2$$

(vores metode på side 51 viser at $\sum \nu_i \approx 1/2\, n^2/(\log n)^2$). Af disse to uligheder følger at $\alpha > 0$, og derfor følger af 3 at der findes et $s \in N$ således at $sA = \mathbb{N}_0$, det vil sige: ethvert naturligt tal er summen af højst 2s primtal.

Anvendes denne metode i sin rå form er tallet s ekstremt stort. Hvis det kun forlanges at ethvert *tilstrækkeligt stort* tal kan skrives som summen af højst 2s primtal kan s reduceres til 400.000. Men i årenes løb er s naturligvis blevet reduceret ved forfining af metoden. De bedste resultater indtil nu lyder: *ethvert* tal kan skrives som summen af højst 19 primtal (Riesel & Vaughen, 1983), og ethvert *tilstrækkeligt stort* tal kan skrives som summen af højst 6 primtal (Vaughan, 1977) (dette er et svagere resultat end sætningen bevist af Vinogradov som jo siger at s = 4).

Hvorfor "beviset" for Goldbachs formodning svigter

Lad os undersøge hvad det er der gør, at beviset (modulo Riemanns hypotese) for at restleddet i formlen for μ^r_n ($r > 2$) er forsvindende i forhold til det principale led ikke fungerer når r = 2.
Vi kigger nærmere på udledningen af udtrykket for $\underline{\nu}_n$ på side 51. I Hardy & Littlewoods bevis (for formlen for $\underline{\nu}^r_n$) er der integreret over en cirkel med radius $e^{-1/n}$, og opdelingen af denne er bestemt ved $N = [\sqrt{n}]$. For hvert k = 1, ..., N og h = 1, ..., k - 1 (h primisk med k, h = 0 for k = 1) er punkterne på buestykket indeholdende $e(h/k)e^{-1/n}$ givet ved $e(h/k)e^{-y}$,

hvor $y = 1/n + \theta i$ og θ løber fra $-\theta'_{h,k}$ til $\theta_{h,k}$. Vi har $\pi/(kN) \leq \theta_{h,k} < 2\pi/(kN)$, og samme ulighed for $\theta'_{h,k}$. I udregningerne nedenfor er y af formen $y = 1/n + \theta i$ (θ reel), heraf følger at $|e^{-ny}| = 1$. $\sum \log p\, x^p$ udregnet ud fra h/k kan skrives $(-\mu(k)/\phi(k))y^{-1} + \Phi(y)$. Hardy & Littlewood viser at når θ varierer fra $-\theta'_{h,k}$ til $\theta_{h,k}$ er $|\Phi(y)|$ af mindre størrelsesorden end $n^{3/4}\log(n)^B$ (B er her og i det følgende et reelt tal hvis konkrete størrelse er uden betydning og som kan skifte værdi fra formel til formel). Her har vi forudsat at Riemanns hypotese for L-funktionerne $L_r(s)$ ($r = 1, ..., \phi(k)$) på side 46 gælder i sin strengeste form: for ethvert nulpunkt ρ for $L_r(\rho)$ er $\mathrm{Re}(\rho) \leq 1/2$ - som sagt behøver vi i det generaliserede tilfælde kun at forudsætte at der findes et tal $\Theta < 3/4$ således at for ethvert nulpunkt ρ for $L_r(s)$ er $\mathrm{Re}(\rho) \leq \Theta$. Da det principale led i formlen for $\underline{\nu}_n$ er af størrelsesorden $n(\log n)^B$, er Goldbachs formodning bevist hvis det kan bevises at restleddet er af mindre størrelsesorden end $n^{1-\varepsilon}(\log n)^B$ for et $\varepsilon > 0$ - dette kan vi umiddelbart kun forvente hvis hver af dets bestanddele er af mindre størrelsesorden end $n^{1-\varepsilon}(\log n)^B$, og det er dette vi vil illustrere er problematisk. Vi sætter $c_k(n) = \sum e(h/k)^n$ (sum over h) og der gælder $c_k(n) = c_k(-n)$.

Restleddene kan deles i fire typer:

1. Fejlen der begås ved at erstatte

$$\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny}/y\, dy$$

med

$$\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/n-\infty i}^{1/n+\infty i} e^{ny}/y\, dy,$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

$$\sum |c_k(n)|(\mu(k)/\phi(k))^2 \int_{1/(k\sqrt{n})}^{\infty} 1/(1/n^2 + \theta^2)\, d\theta.$$

Da

$$\int_{1/(k\sqrt{n})}^{\infty} 1/(1/n^2 + \theta^2)\, d\theta = n(\pi/2 - \arctan(\sqrt{n}/k)) \approx k\sqrt{n},$$

er det nødvendigt at vise $\sum |c_k(n)|(\mu(k)/\phi(k))^2 k$ (sum over $k = 1, ..., N = [\sqrt{n}]$) er af mindre størrelsesorden end $n^{1/2-\varepsilon}$ $(\log n)^B$, men umiddelbart kan det kun vises at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

2. Fejlen der begås ved at fjerne

$$\sum c_k(n) \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny}\, \Phi(y)^2\, dy$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

$$|\Phi|^2 \left(\sum |c_k(n)| \int_0^{1/(k\sqrt{n})} d\theta\right) = |\Phi|^2\, n^{-1/2} \sum |c_k(n)|/k \quad (k = 1, ..., N)$$

altså skal $\sum |c_k(n)|/k$ vises at være af mindre størrelsesorden end $n^{-\varepsilon}(\log n)^B$, men umiddelbart kan det kun vises at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

3. Fejlen der begås ved at fjerne

$$\sum c_k(n)\mu(k)/\phi(k) \int_{1/n-\theta'_{h,k}i}^{1/n+\theta_{h,k}i} e^{ny}\Phi(y)y^{-1}\, dy,$$

kan umiddelbart kun vises at være af mindre størrelsesorden end

$$|\Phi| \sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k) \int_0^\infty (1/n^2 + \theta^2)^{-1/2}\, d\theta < |\Phi| \sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k)$$

altså skal $\sum |c_k(n)\mu(k)|/\phi(k)$ vises at være af mindre størrelsesorden end $n^{1/4-\varepsilon} (\log n)^B$, men umiddelbart kan det kun vises at denne sum er af størrelsesorden $n^{1/2}$.

4. Fejlen der begås ved i det principale led at summere k fra 1 til ∞ i stedet for blot fra 1 til N er af mindre størrelsesorden end n $|\sum c_k(n)(\mu(k)/\phi(k))^2|$ ($k \geq N$), og om summen her kan vi umiddelbart kun sige at den er af størrelsesorden log n.

I tilfælde 1 og 4 gælder vurderingen lige på grænsen, men i tilfælde 2 og 3, hvor man benytter vurderingen af $\Phi(y)$, ses at denne skal forbedres fra størrelsesorden $n^{3/4} (\log n)^B$ til størrelsesorden $n^{1/2} (\log n)^B$ hvis man også her skal have en vurdering der gælder lige på grænsen.

Lad os se hvorfor vi ikke umiddelbart kan formindske exponenten 3/4 til 1/2. Hvis $x = e(h/k)e^{-y}$ er $\sum \log p\, x^p = (-\mu(k)/\phi(k))y^{-1} + \Phi(y)$, og man skal vurdere $\Phi(y)$ for $y = 1/n + \theta i$. Der gælder

$$\sum \log p\, x^p = \sum_{(n,k)=1} \Lambda_n x^n + f(x)$$

og da det let kan vises at $|f(x)| < Bn^{1/2} (\log n)^{B'}$ på cirklen om 0 med radius $e^{-1/n}$, er det størrelsen af $\sum \Lambda_n x^n = 1/(2\pi i) \int y^{-s}\, \Gamma(s)\, Z^{h/k}{}_\Lambda(s)\, ds$ der skal undersøges. Da

$$Z^{h/k}{}_\Lambda(s) = -1/\phi(k) \sum_{r=1}^{\phi(k)} \kappa_r(h/k)\, L'_r(s)/L_r(s)$$

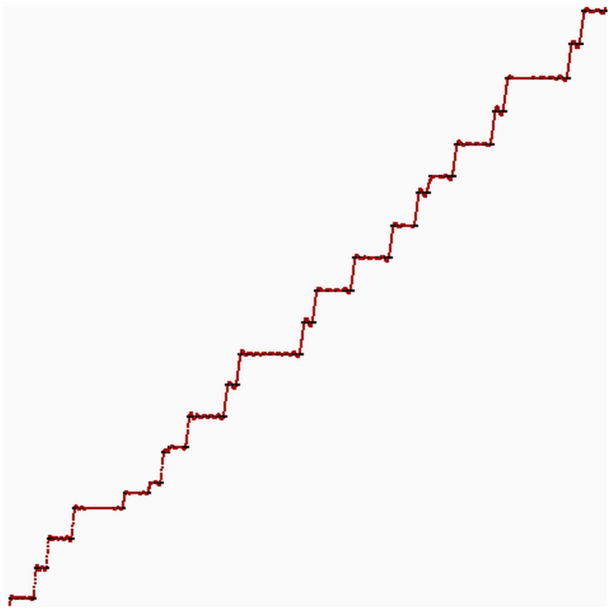
hvor $\kappa_r(h/k) = \sum e(h/k)^j \chi_r(j)^{-1}$ ($j \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$), kommer de bidrag til $\sum \Lambda_n x^n$ der kan genere fra nulpunkterne ρ for $L_r(s)$ med $\mathrm{Re}(\rho) \geq 0$ og fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$. Vi har antaget at for et nulpunkt ρ er $\mathrm{Re}(\rho) \le 1/2$, men faktisk kommer selv nulpunkterne for $L_r(s)$ ($r > 1$) med $\mathrm{Re}(\rho) = 0$ til at volde problemer. Nemlig på følgende måde: For $r > 1$ har $L'_r(s)/L_r(s)$ formen

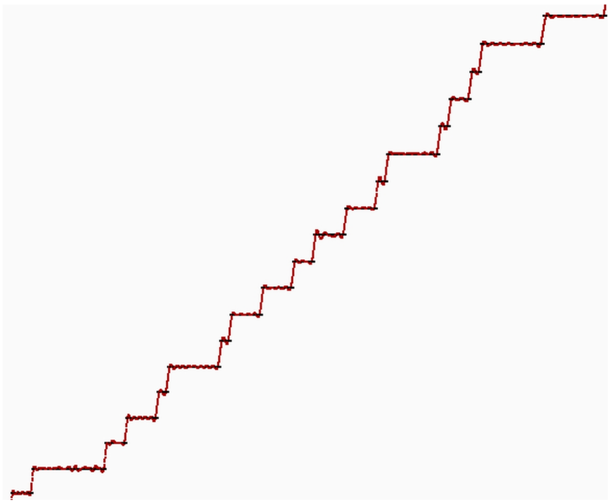
$$L'_r(s)/L_r(s) = a/s + b + \sum (1/(s - \rho) - 1/\rho) - 1/2\ \Gamma'(s/2 + \alpha)/\Gamma(s/2 + \alpha)$$

hvor $\rho \neq 0$ er nulpunkterne for $L_r(s)$ med $\mathrm{Re}(\rho) \ge 0$ og hvor $\alpha = 0$ eller 1/2. Derfor kommer tallet b til at medvirke til bidraget fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$. Størrelsen af $|b|$ kan findes ved at sætte $s = 1$ i denne ligning. Leddene bortset fra b og $\sum_{\mathrm{Re}(\rho)=0}$ ... er af mindre størrelsesorden end $(\log k)^B$, men $\sum_{\mathrm{Re}(\rho)=0}$ ... kan kun vises at være af størrelsesorden $k \log k$. Thi et nulpunkt for $L_r(s)$ ($r > 1$) er nulpunkt for $\prod (1 - \varepsilon_p/p^s)$ (p divisorerne i k), hvor ε_p er en $\phi(k)$-te rod af enheden, derfor kan $|1/\rho|$ være af størrelsesorden $k \log k$. Disse bidrag fra $r = 2, ..., \phi(k)$ skal hver ganges med $\kappa_r(h/k)/\phi(k)$ og summeres fra $k = 1$ til $N = [\sqrt{n}]$, og da $|\kappa_r(h/k)| = \sqrt{k}$ (for $r > 1$) kan vi om størrelsesordenen af bidraget til $\sum \Lambda_n x^n$ fra polen $s = 0$ for $\Gamma(s)$, ikke umiddelbart sige om den kan vises at være mindre end $n^{3/4} (\log n)^B$.

Da vi jo har et eksakt formeludtryk for restleddet i formlen for $\underline{\nu}_n$, er det store spørgsmål om det kan lade sig gøre at udarbejde en så fin vurdering af dets bestanddele at det kan vises at være af mindre størrelsesorden end n. Ingen har formået dette: man har kastet sig over metoderne i det foregående kapitel.

Grafer for Chebyshevs ψ-funktion og θ-funktion (side 33):





Litteratur

[1] B. Riemann: "Ueber die Anzahl der primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859 (i denne klassiker på 8 sider indføres betegnelsen $\zeta(s)$ for funktionen $\sum 1/n^s = \prod (1-1/p^s)^{-1}$ (som Euler havde studeret), Riemann viser at den har meromorf udvidelse, beviser dens funktionalligning (som Euler kendte men ikke kunne bevise) og opstiller Riemanns hypotese - meningen med det hele er at udlede formlen for π_n).

[2] Edwards, H.M.: "Riemann's Zeta Function", Academic Press, New York, 1974 (omhyggelig gennemgang af Riemanns afhandling og af senere resultater i teorien, 320 sider).

[3] Titchmarsh, E.C.: "The Theory of the Riemann Zeta Function", Clarendon Oxford, 1953, 1971 (grundig fremstilling af teorien for zetafunktioner, 350 sider).

[4] G.H. Hardy and J.E. Littlewood: "Some problems of 'Partitio Numerorum' III: On the expression of a number as a sum of primes", Acta Mathematica, 44 (1923), 1-70.

[5] I.M. Vinogradow: "Representation of an odd number as a sum of three primes", Doklady Akad. Nauk SSSR, 15 (1937) 291-294.

[6] Chen, J.R.: "On the representation of a large even integer as the sum og a prime and the product of at most two primes, I and II", Sci. Sinica, 16, 1973, 157-176, and 21, 1978, 421-430.

[7] Wang Yuan (ed.): "Goldbach Conjecture", World Scientific, Singapore, 1984 (indeholder 19 af de vigtigste afhandlinger med resultater der har tilknytning til Goldbachs formodning (bl.a. de to overnævnte afhandlinger), samt en introduktion på 18 sider og en litteraturliste på 25 sider).

[8] Pan Chengdong and Pan Chengbiao: "Goldbach Conjecture", Science Press, Bei-jing, 1992 (beviser for en række tekniske resultater der har tilknytning til Goldbachs formodning, har kun interesse for folk der har ambitioner om at forske i teorien, 240 sider).

[9] Ribenboim, Paulo: "The Little Book of Big Primes", Springer-Verlag, 1991 (spændende bog - opremsning af de vigtigste resultater inden for primtalsteorien, 230 sider, omfattende kronologisk litteraturliste).